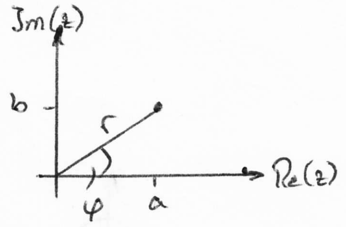
§2

2.1 Komplexe Zahlen

$z = a + ib$ → Vektor in komplexer Zahlenebene



Polarform: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$= r \cdot e^{i\varphi}$,

mit $r = \sqrt{a^2+b^2}$ (Betrag) $= |z|$

Division: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, mit $\bar{z} = a - ib$ (konjugierte Zahl)

~~n-Einheitswurzel:~~

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad \underbrace{k = 0, \dots, n-1}_{\text{genau } n \text{ Lösungen}}$$

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom n-ten Grades lässt sich als Produkt von n Linearfaktoren schreiben:

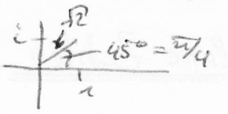
$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = (z-b_1)(z-b_2)\cdot\ldots\cdot(z-b_n).$$

Die komplexen Zahlen $b_1, \dots, b_n$ sind die Nullstellen des Polynoms.

Aufgabe A1:

$z = (1+i)^n$ Polardarstellung von $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}^n \cdot e^{i\frac{\pi}{4}n}$



$= 2^{n/2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}n}$

$= 2^{n/2} \cos(\frac{\pi}{4}n) + i\, 2^{n/2} \sin(\frac{\pi}{4}n)$

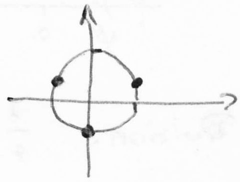
$z^2 = -9 \Rightarrow z = 3i, -3i$

$z^3 = 8i = 8 \cdot e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{2\pi}{3}} = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{9\pi}{6}}$



Aufgabe A2:

$z = \frac{5}{1-3i} = 5 \cdot \frac{1+3i}{1+9} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \Rightarrow Re(z) = \frac{1}{2},\ Jm(z) = \frac{3}{2}$

$z = \frac{4+i}{1-i} + 7i = (4+i) \cdot \frac{1+i}{2} + 7i = \frac{1}{2}(4-1+5i) + 7i$

$= \frac{3}{2} + \frac{19}{2}i \Rightarrow Re(z) = \frac{3}{2},\ Jm(z) = \frac{19}{2}$

$z = 3e^{-i\pi/2} = 3(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$

$= 3(0 - i) = -3i \Rightarrow Re(z) = 0,\ Jm(z) = -3$

Aufgabe A8: (Gehört zu 2.4 Abbildungen)

Definieren $g_a(x) := f(x) - f(x+a)$ auf der Definitionsmenge $D_{g_a} = (0, 1-a)$.

$\Rightarrow g_a(0) = f(0) - f(a) = -f(a) < 0$, weil $a \in (0,1)$.

$g_a(1-a) = f(1-a) - f(1-a+a)$

$= f(1-a) - f(1) = f(1-a) > 0$.

g_a ist stetig auf D_{g_a} (weil f stetig ist)

$\Rightarrow$ nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_a \in D_{g_a} = (0, 1-a)$, so dass $g_a(x_a) = 0$, d.h.

$f(x_a) = f(x_a + a)$.

2.2 Folgen

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, a_n: n-tes Folgenglied

beschränkt: $(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n|\le M$

(streng) monoton wachsend: $a_{n+1}\ge a_n$ $(a_{n+1}>a_n)$

(-"-) —"— fallend: $a_{n+1}\le a_n$ $(a_{n+1}<a_n)$

konvergent gegen a: $(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\ge N)\ |a_n-a|<\varepsilon$

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

$\Leftrightarrow$ $(a_n-a)\longrightarrow 0$, d.h. $(a_n-a)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

Rechenregeln: $\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n$

$\lim(a_n\cdot b_n)=\lim a_n\cdot\lim b_n$

$\lim\frac{a_n}{b_n} = \lim a_n/\lim b_n$ falls $b_n\neq 0$, $n\ge N$.

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim\frac{p_k n^k+p_{k-1}n^{k-1}+\ldots+p_0}{q_l n^l+q_{l-1}n^{l-1}+\ldots+q_0} = \begin{cases} 0 &, k<l \\ \frac{p_k}{q_l} &, k=l \end{cases}$$

für $k>l$ ist die Folge divergent.

$\lim\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\frac{\ln n}{n^\alpha}=0$ für $\alpha>0$

$\lim\frac{n^\alpha}{e^{pn}}=0$ (Hierarchie: $\ln n < n^\alpha < a^n < n!$, $\alpha>0$, $a>1$ für n genügend groß)

$\lim\frac{a^n}{n!}=0$

$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

Konvergenzkriterien:

Monotoniekrit.: monoton & beschränkt $\Rightarrow$ konvergent

Cauchy-Krit.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Leftrightarrow$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n,m\ge N)\ |a_n-a_m|<\varepsilon$

Aufgabe A3:

a) $a_n = \frac{\sqrt{3n^8}+n^2}{7n^4+\sqrt{2n^5}} = \frac{\sqrt{3}\,n^4+n^2}{7n^4+\sqrt{2}\,n^{5/2}} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{7}$

$= \frac{\sqrt{3}+1/n^2}{7+\sqrt{2}/n^{3/2}}$

b) $b_n = \frac{n\cdot 4^n}{(n+1)!}$, Annahme $b_n \searrow 0$.

$|b_n - 0| = \frac{n4^n}{(n+1)!} \underset{\text{für } n\geq 4}{<} \frac{4^n}{(n+1)\cdot 4^{n-4}} = \underbrace{\frac{4^4}{n+1}}_{\text{Majorante}} \longrightarrow 0$

für $n \geq 4$:
$(n+1)! = (n+1)\cdot n\cdot \underbrace{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\geq 4^{n-4}}$

c) $c_n = \underbrace{\frac{5n^3-3n+1}{(2n+1)^3}}_{=\tilde{c}_n}\cdot\underbrace{\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n}_{=\hat{c}_n \to e^{-4}} \Rightarrow \lim c_n = \lim \tilde{c}_n \cdot \lim \hat{c}_n$

$= \frac{5}{2^3}\cdot e^{-4} = 5/8 \cdot e^{-4}$

d) $d_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-3}$

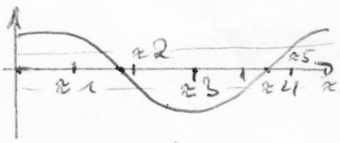
$\lim d_n = \left(\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n / \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$

$\left[\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\right] \quad = (e^{-1})^3 \cdot e/1 = e^{-2}$

e) $e_n = (-1)^n e^{1/n}$

$|e_n| = e^{1/n} > 1$ und e_n alterniert $\Rightarrow$ e_n ist divergent (unbestimmt)

f) $f_n = n\cdot\cos n$



$(\forall N\in\mathbb{N})(\exists n_1 > N)\ \cos n_1 > \frac{1}{2} \Rightarrow f_{n_1} > \frac{n_1}{2}$

$(\forall N\in\mathbb{N})(\exists n_2 > N)\ \cos n_2 < -\frac{1}{2} \Rightarrow f_{n_2} < -\frac{n_2}{2}$

$\Big\}$ f_n divergiert (unbestimmt)

g) $g_n = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, Annahme: $\lim g_n = 1$.

$|g_n - 1| = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$, $a \geq b$

h) $h_n = \sqrt[n]{3^n+5^n}$

$\underbrace{5}_{\text{Minorante}} < h_n < \underbrace{\sqrt[n]{2\cdot 5^n}}_{\text{Majorante}} = 2^{1/n}\cdot 5 = 5 \Rightarrow h_n \to 5$

i) $i_n = \frac{(-3)^n+6^n}{2^n+6^n} = \underbrace{\frac{(-3)^n}{2^n+6^n}}_{\tilde{i}_n} + \underbrace{\frac{6^n}{2^n+6^n}}_{\hat{i}_n}$. $|\tilde{i}_n| < \left|\frac{3^n}{6^n}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$

~~$|\hat{i}_n| < 1$~~

~~$\Rightarrow |i_n| < |\tilde{i}_n|\cdot 1 \to 0$~~

~~$\Rightarrow \lim i_n = 0$~~

$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$; $\lim \frac{2^n+6^n}{6^n} = \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 = 1$

$\Rightarrow \lim \hat{i}_n = 1$

$\Rightarrow \lim i_n = 1 + 0 = 1.$

2.3 Reihen

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Partialsummen : $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

Reihe : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Reihe : divergiert / konvergiert $\Leftrightarrow$ Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert / konvergiert

Wichtige Reihen:

geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $|q| < 1$ $\Rightarrow$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$

harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert

Exponentialreihe $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Konvergenzkriterien:

Cauchy-Krit.: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq m \geq N) \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

Notwendiges Krit.: $\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge

Leibniz-Krit.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge
$\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ konvergent

Ist $\sum |a_n|$ konvergent, so heißt die Reihe absolut konvergent.

$\underbrace{\sum |a_n|}_{\text{konv.}} \Rightarrow \sum a_n$ konvergiert.

Konvergenzkriterien:

Majorantenkrit.: $|a_n| \leq b_n$, $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv. abs.

Minorantenkrit.: $\sum |a_n|$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div.

Quotientenkrit.: $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow$ abs. Konvergenz
> 1 Divergenz

Wurzelkrit.: $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow$ abs. Konvergenz
> 1 Divergenz

Aufgabe A4:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ für $n \geq 3$: $\frac{n+4}{n^2 \underbrace{-3n+1}_{<0}} > \frac{n+4}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ Reihe hat divergente Minorante $\Rightarrow$ Reihe divergiert

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ alternierend und $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ist Nullfolge

$\Rightarrow$ nach Leibniz-Kriterium ist die Reihe konvergent

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ Quotientenkriterium:

$$\lim \left| \frac{2^{k+1}\, k!}{(k+1)!\, 2^k} \right| = \lim \frac{2}{k+1} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe (absolut) konvergent

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2-\frac{1}{k})^k}$ Wurzelkriterium:

$$\lim \sqrt[k]{\frac{1}{(2-\frac{1}{k})^k}} = \lim \frac{1}{2-\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe (absolut) konvergent

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$

$\uparrow$ konvergente Majorante: geometr. Reihe

f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\ln k}$ alternierend und $\frac{1}{\sqrt{k}\ln k}$ ist Nullfolge

$\Rightarrow$ nach Leibniz-Kriterium ist die Reihe konvergent

Aufgabe A5:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 5\left(1+\frac{3}{4}\right) = 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - \frac{23}{4} = \frac{80-23}{4} = \frac{57}{4}$$

$\uparrow$ geometr. Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3}_{<1}\right)^k = \frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3} = \frac{1}{1-\frac{x^6}{x^6+3x^4+3x^2+1}}$$

$\uparrow$ geometr. Reihe $\quad = \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{3x^4+3x^2+1}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}$ (konvergiert, da von $\sum \frac{1}{k^2}$ majorisiert wird)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots \text{ Teleskopsumme}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1.$$

2.4 Abbildungen

$f: D \to Y$ D: Definitionsbereich

$x \longmapsto f(x)$ $f(D) := \{ f(x) \mid x \in D \} \subseteq Y$: Bild

injektiv : $(\forall x_1 \neq x_2 \in D)\ f(x_1) \neq f(x_2)$

surjektiv : $f(D) = Y$

bijektiv : f injektiv & surjektiv

$\Rightarrow$ Umkehrabbildung: $f^{-1}: f(D) \to D$

$$y \longmapsto f^{-1}(y)$$

$$(\forall x \in D,\ y \in f(D))\ (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ und } (f \circ f^{-1})(y) = y$$

Elementare Funktionen: Polynome, Potenz-, Wurzel-, Exponential-, Logarithmus- & trigonometr. Funktionen

Grenzwert von Funktionen:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ heißt für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset D$, die gegen x_0 konvergieren, gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$$

Bsp: $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Stetigkeit: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(= f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)\right).$$

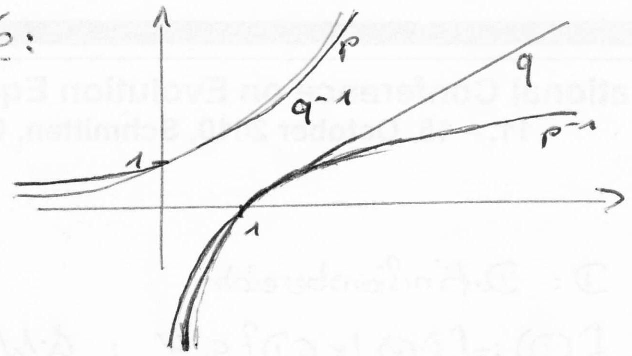
Sind f und g stetige Funktionen, so auch $f+g$, $f \cdot g$, ...

Eigenschaften auf abgeschlossenen Intervallen: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- Min./Max. existieren
- f ist beschränkt
- Zwischenwertsatz
- "Graph hat keine Sprünge"

Aufgabe 6:

a)



$B_p = \{e^x \mid x \in D_p = \mathbb{R}\}$
$= (0,\infty)$

$B_q = \{q(x) \mid x \in D_q = (0,\infty)\}$
$= \mathbb{R}$

b) Zu zeigen: Für ~~...~~ $x_2 > x_1$ gilt $q(x_2) > q(x_1) \iff q(x_2) - q(x_1) > 0$

$$q(x_2) - q(x_1) = \frac{x_2 - 1/x_2}{2} - \frac{x_1 - 1/x_1}{2} = \frac{(x_2 - x_1) + (1/x_1 - 1/x_2)}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ q ist streng monoton wachsend

c) $p^{-1}: \quad y = e^x \Rightarrow \ln y = \ln e^x = x \Rightarrow p^{-1}(y) = \ln y$

$D_{p^{-1}} = B_p = (0,\infty)$

$q^{-1}: \quad y = \frac{x - 1/x}{2} \qquad D_{q^{-1}} = B_q = \mathbb{R}$

$\iff 2y = x - \frac{1}{x}$

$\overset{x\neq 0}{\iff} 2xy = x - 1 \iff x^2 - 2xy - 1 = 0$

$x = y \pm \sqrt{y^2+1}$

Fall $y - \sqrt{y^2+1}$: $\quad x = y - \sqrt{y^2+1} < 0$ ↯

aber $x \in (0,\infty) = D_q = B_{q^{-1}}$

Fall $y + \sqrt{y^2+1}$: OK.

$\Rightarrow q^{-1}(y) = y + \sqrt{y^2+1}$

d) $\sinh(x) = \frac{e^x - 1/e^x}{2} = q(e^x) = q(p(x)) = (q \circ p)(x)$

$\Rightarrow \operatorname{arcsinh}(x) = (q \circ p)^{-1}(x) = (p^{-1} \circ q^{-1})(x)$

$= p^{-1}(x + \sqrt{x^2+1})$

$= \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Aufgabe 7:

a) Für $x_0 \neq 0$: ist die Funktion stetig, denn $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{2}{x}$
$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{x_0 + h} = \frac{2}{x_0} = f(x_0)$.

Für $x_0 = 0$: $\lim_{n \to \infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} 2n = \infty \neq f(0)$

somit ist f nicht stetig in 0.

b) $\lim_{h \searrow 0} \frac{\sqrt{h+9} - 3}{h} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h \searrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{h+9}}}{1} = \frac{1}{6}$

$\#$

$\lim_{h \searrow 0} \frac{\sqrt{h+9} - 3}{\sqrt{h}} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h+9}} = 0$ $\Rightarrow$ g kann nicht stetig fortgesetzt werden, da rechts- & linksseitiger Grenzwert in 0 verschieden sind.