Fachbereich Mathematik
Raphael Schulz
Sommersemester 2011

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.10.2011

Klausurvorbereitungskurs

Mathematik I für MB

3. + 4. Übung: Komlexe Zahlen, Folgen, Reihen und Abbildungen

A1 Polardarstellung komplexer Zahlen

Verwende die Polardarstellung um folgendes zu bestimmen:

$$z = (1+i)^n, n \in \mathbb{N}, \qquad z^2 = -9 \qquad \text{und} \qquad z^3 = 8i.$$

A2 Real- und Imaginärteil

Bestimme Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$\frac{5}{1-3i}, \qquad \frac{4+i}{1-i} + 7i \qquad \text{und} \qquad 3e^{-i\pi/2}.$$

A3 Konvergenz von Folgen

Untersuche diese Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \frac{\sqrt{3n^8}+n^2}{7n^4+\sqrt{2n^5}}$

b) $b_n = \frac{n \cdot 4^n}{(n+1)!}$

c) $c_n = \frac{5n^3-3n+1}{(2n+1)^3} \cdot \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n$

d) $d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-3}$

e) $e_n = (-1)^n e^{1/n}$

f) $f_n = n \cdot \cos n$

g) $g_n = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$

h) $h_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

i) $i_n = \frac{(-3)^n + 6^n}{2^n + 6^n}$.

A4 Konvergenz von Reihen

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2-\frac{1}{k})^k}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k \ln k}}$

A5 Grenzwert von Reihen

Berechne die Reihensumme der Reihen:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 5\left(\frac{3}{4}\right)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{3k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}.$$

A6 Umkehrabbildung

Gegeben seien die Funktionen

$$p(x) = e^x, D_p = \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad q(x) = \frac{x - 1/x}{2}, D_q = (0, \infty).$$

a) Man gebe die Bildmengen B_p und B_q an und skizziere die Graphen von p und q.

b) Zeige: q ist streng monoton wachsend. Ist q umkehrbar?

c) Bestimme die Umkehrabbildungen p^{-1} und q^{-1} und skizziere deren Graphen.

d) Stelle die Funktion

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, D_{\sinh} = \mathbb{R},$$

mit Hilfe einer geeigneten Verkettung der Funktionen p und q dar und bestimme eine Formel für die Umkehrfunktion $\operatorname{arcsinh}(y)$.

A7 Stetige Funktionen

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$ stetig?

b) Lässt sich die Funktion $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}, & \text{für } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}}, & \text{für } x > 0 \end{cases}$ an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzen?

A8 Stetigkeit

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, 1)$. Man zeige, dass es für alle $a \in (0, 1)$ ein $x_a \in (0, 1 - a)$ gibt, so dass $f(x_a) = f(x_a + a)$.