Klausurvorbereitung Mathe I

Themen:
1) Vektorrechnung und Lineare Gleichungssysteme
2) Lineare Gleichungssysteme und Lineare Abbildungen
3) Folgen und Reihen
4) Komplexe Zahlen, Abbildungen und Funktionen
5) Differential - und Integralrechnung

§1 1.1 Vektorrechnung

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ (Euklidische) Norm

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ Skalarprodukt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$$

z.B. $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$.

Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_3 \end{pmatrix} \perp \vec{x}, \vec{y}$$

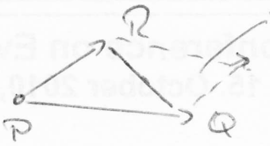
$\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ = Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms
$= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\varphi$

Gerade / Ebene

Gerade	Ebene	
$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}$	$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s}$	parametrisierte Form
$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle$	$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle$	implizite Form
$\langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle - \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = 0$	$\langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle - \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = 0$	Hesse - Normalform

Normalenvektor $\vec{n}$ senkrecht zu allen Richtungsvektoren.
normiertes Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0 := \operatorname{sgn}(\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

Aufgabe A1:



Fläche: $\| \vec{PR} \times \vec{PQ} \|$.

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6-3 \\ 6-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{9+36+4} = \underline{\underline{7/2}}$$

Aufgabe A2:

Schnittgerade $g = \{ x \in E_1 \cap E_2 \}$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{I} - \text{II}: \quad -x_1 - 4x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = -2 - 4x_3$$

$$-2 - 4x_3 + x_2 - 3x_3 = 2$$

$$\Rightarrow x_2 = 4 + 7x_3$$

2 Gleichungen, 3 Variablen $\Rightarrow$ unterbestimmtes LGS, d.h. 1 Variable frei wählbar

Setze $x_3 = \lambda$:

$$g(\lambda) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schnittwinkel: Winkel zwischen Ebenen = Winkel zwischen Normalen

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(implizite Darstellung)}$$

$$\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \| \vec{n}_1 \| \cdot \| \vec{n}_2 \| \cdot \cos \varphi$$

$$\| \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \cancel{\cos \varphi = \frac{\| \vec{n}_1 \| \cdot \| \vec{n}_2 \|}{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle} = \sqrt{11} \cdot \sqrt{6}}$$

$$2 + 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = \pi/2}}$$

Aufgabe A3:

1. Möglichkeit: Hesse Normalform

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\quad \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle = 2+1 > 0$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{3}$

$E: \left\langle \vec{x}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0$, $\qquad g(s) = \begin{pmatrix}4+s\\1\\-2+s\end{pmatrix}$

↑ Abstand z. Ursprung

$$d(g(s), E) = \left| \left\langle g(s), \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle - \sqrt{3} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} (4+s-1-2+s) - \sqrt{3} \right|$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} |1-s|$$

minimal für $s=1$: $d(g(s), E) = 0$,

d.h. $g_1(1) = \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$ ist Schnittpunkt von Gerade & Ebene.

2. Möglichkeit: ~~Lot~~ $n=3$

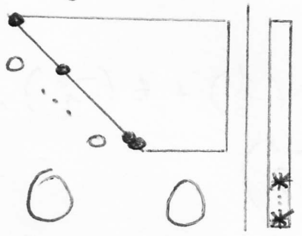
Richtungsvektor von g ist nicht senkrecht zu Normalen der Ebene
$\Rightarrow g \nparallel E \Rightarrow g$ und E haben genau einen
Schnittpunkt $\Rightarrow d(g, E) = 0$.

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 2 \neq 0.$$

1.2 Lineare Gleichungssysteme

A $n\times m$ - Matrix, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Suchen Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ d. Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$.

Gauß - Algorithmus: Führe LGS über elementare Umformungen (Zeilen- & Spaltenvertauschung / Skalierung / Addition) in gestaffelte Form



Lösbarkeit: Existiert $* \neq 0$, dann keine Lösung.

rang $A = n$ $(\Leftrightarrow \det A \neq 0)$ $\Rightarrow$ genau eine Lsg.

~~Alle~~ Alle $* = 0$ und rang $A < n$ $\Rightarrow$ unendl. viele Lsgen.

Dimension der Lösungs~~formel~~menge:

dim ker A = n - rang A

Homogenes System: $A\vec{x} = \vec{0}$

Lösungsraum ker $A = \{\vec{x} : A\vec{x} = 0\}$ ist ~~Dimensionsformel~~ Teilraum von $\mathbb{R}^m$

Inhomogenes System: $A\vec{x} = \vec{b}$ $(\neq \vec{0})$

dim Lösungsraum = dim ker A, Lösungsraum = ker $A + \vec{x}_s$

$\vec{x}_s$ ist eine spezielle Lsg. des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$.

Determinante:

$\det A = 0 \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ hat keine oder unendl. viele Lösungen

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ dim ker $A = n -$ rang $A = 0 \Leftrightarrow$ genau eine Lösung.

Aufgabe A4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha^2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

	x	y	z	
	1	2	3	2
⊖	0	1	-1	0
	1	4	4	1
	1	2	3	2
-2	0	1	-1	0
	0	2	1	-1
	1	2	3	2
	0	1	-1	0
	0	0	3	-1

$\Rightarrow z = -1/3$

$y = z \Rightarrow y = -1/3$

$x = 2 - 2y - 3z \Rightarrow x = 2 + 5/3 = 11/3$

$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha^2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha^2 & 4 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha^2 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot 4 - \alpha^2(-1) - 0 + (-1)\cdot 2 - 1 \cdot 3$

$= 4 + \alpha^2 - 5 = \alpha^2 - 1$

Lösung nicht eindeutig $\Leftrightarrow \det A = \alpha^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1$

$\underline{\alpha_1 = 1:}$ $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow y = z,\ x = 1 - 5z$

$\Rightarrow S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$

$\underline{\alpha_2 = -1:}$ $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

$S = \emptyset.$

c) $E_1:\ x + 2y + 3z = \alpha$

allgemein parametr. Form: $\vec{p} + \lambda \vec{r_1} + \mu \vec{r_2} = \vec{x}$

$\vec{p}$: beliebiger Punkt auf E_1,

z. B. $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{r_1}, \vec{r_2}$: lin. unabhg. Richtungsvektoren senkrecht zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

z. B. $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe A5:

$$
\begin{array}{ccc|c}
 & 3A & & 3b \\
\hline
2 & 4 & -4 & 2 \\
-1 & -2 & 2 & -1 \\
1 & 2 & -2 & 1 \\
\hline
2 & 4 & -4 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

} zweifach unterbestimmt

$x_3 = \lambda,\ x_2 = \mu$ frei wählbar

$x_1 = 1 - 2x_2 + 2x_3$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungen liegen in einer Ebene (wird von jeder Gleichung beschrieben).

Aufgabe A7:

$$\det A = 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-9) \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 \cdot 1 - [(-1) \cdot 5 \cdot (-4) + 1 \cdot (-9) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2]$$
$$= 10 + 18 - 8 - 20 + 9 - 8$$
$$= 1 \neq 0 \quad \Rightarrow A \text{ ist invertierbar.}$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{A} & \multicolumn{3}{c}{E} \\
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 19 & -8 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \\
\multicolumn{3}{c|}{E} & \multicolumn{3}{c}{A^{-1}}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -8 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 48 + 60 + 60 - 64 - 50 - 54 = 0$$

$\Rightarrow B$ ist <u>nicht</u> invertierbar.

Aufgabe A6:

a) $\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\\2\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}4\\7\\10\\10\end{pmatrix} \right\}$

$$\lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\3\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\10\\10\end{pmatrix} \quad \text{(Linearkombination)}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|c}
\lambda & \mu & \nu & \\
\hline
1 & -1 & 0 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 7 \\
1 & 3 & 4 & 10 \\
1 & 3 & 2 & 10 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 4 \\
0 & 2 & 2 & 3 \\
0 & 4 & 4 & 6 \\
0 & 4 & 2 & 6 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 4 \\
0 & 2 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \nu = 0, \ \mu = 3/2, \ \lambda = 4 + \mu = 11/2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\10\\10\end{pmatrix}$ linear abhängig

$$\left\{ \det \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 1 & 2\\1 & 3 & 4\end{pmatrix} = 4 - 2 + 0 - 0 - 6 + 4 = 0 \right\}$$

Es gilt sogar $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$, aber $1 + 3 \neq 2$.

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$.

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\
1 & 3 & 4 & 3 & 10 & 0 \\
1 & 3 & 2 & 3 & 10 & 0 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 4 & 4 & 0 & 6 & 0 \\
0 & 4 & 2 & 0 & 6 & 0 \\
\hline
1 & -1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

zweifach unterbestimmt:
$x_4 = \lambda, \ x_5 = \mu$
$x_3 = 0, \ x_2 = -\frac{3}{2}\mu$
$x_1 = x_2 - 3\lambda - 4\mu = -3\lambda - \frac{11}{2}\mu$

$\Rightarrow \ker A = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-11/2\\-3/2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \dim \ker A + \operatorname{rang} A = 2 + 3 = 5$.

b) $A \cdot \vec{x_s} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\\4\end{pmatrix} = \vec{b}$

$$L = \{ \vec{x} + \vec{x_s} \mid \vec{x} \in \ker A \}$$

1.3 Lineare Abbildungen

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$: $\quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ $\Rightarrow$ f heißt linear.

Matrixschreibweise:

$$A = (f(e_1) \,|\, f(e_2) \,|\, \dots \,|\, f(e_m))$$

Lineare Abbildung f $\iff$ Matrix A

$$f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$$

Umkehrabbg. f^{-1} hat Matrix A^{-1} (f umkehrbar $\iff \det A \neq 0$)

Verkettung: $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = B(Ax) = (BA)\cdot x$$

Spezielle Abbildungen:
- Drehungen: $A^{-1} = A^T$ und $\det A = 1$
- Projektion: $A^2 = A$
- Drehungen: $A^2 = E$

Eigenwerte & Eigenvektoren

A $n\times n$-Matrix.

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{v} = \underset{\text{Eigenwert}}{\lambda}\; \underset{\text{Eigenvektor} \neq \vec{0}}{\vec{v}} \end{array}\right\} \quad (A-\lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

Charakteristisches Polynom: $\det(A-\lambda E)\vec{v} = p(\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ λ ist Eigenwert von A

Eigenvektoren zum EW λ sind Lösungen von $(A-\lambda E)\vec{x} = 0$.

Eigenvektoren eines EW bilden mit $\vec{0}$ einen Teilraum der Dimension $\leq k$, wobei k algebraische Vielfachheit des EW ist.

Hat die Menge aller Eigenvektoren (unabhg. v. EW) die Dimension n, so ist die Matrix diagonalisierbar.

Aufgabe A8:

a)
$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

b)
$$D\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

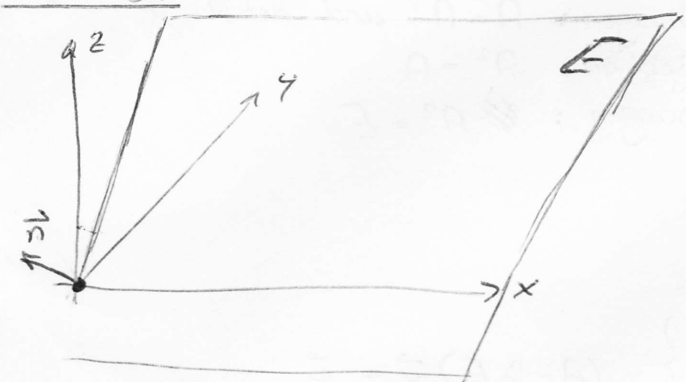
c)
$$D(\varphi)^{-1} \underset{(\text{geometr.})}{=} D(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Probe: $D(\varphi)D(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(-\varphi)D(\varphi).$$

Aufgabe A9:



$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe A 10:

a) Projektion $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Drehung $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\alpha=\pi/2}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad C = BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ODER: $Ce_1 = e_2, \quad Ce_2 = -e_1, \quad Ce_3 = 0$

$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) NEIN! z. B. in $\mathbb{R}^2$. Drehung um Ursprung um $90°$, dann Projektion auf x-Achse:

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Projektion Drehung.

$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{B}\tilde{A}$

Aufgabe A 11:

a) $\det(B - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$= (-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 2(2-\lambda)$

$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$ (einfach), $\lambda_2 = 2$ (zweifach)

λ_1:

v_1	v_2	v_3	
-1	0	-2	0
1	1	1	0
1	0	2	0

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

λ_2:

v_1	v_2	v_3	
-2	0	-2	0
1	0	1	0
1	0	1	0

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Es gilt $A \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v}$ und damit

$\underbrace{(A^{-1}A)\cdot\vec{v}}_{=\vec{v}} = A^{-1}\lambda\cdot\vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v}$

$\Rightarrow \quad A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\cdot\vec{v}$

c) $\det B = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$, sonst wäre 0 ein EW.

$\Rightarrow$ B ist invertierbar

nach Teil b) sind also 1 und $\frac{1}{2}$ (zweifach) EW von B^{-1}.

Die Eigenräume bleiben unverändert

$$E_1 = \left\{ \vec{x} : \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{1/2} = \left\{ \vec{x} : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$