Fachbereich Mathematik
Raphael Schulz
Sommersemester 2011

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

04.10.2011

Klausurvorbereitungskurs
Mathematik I für MB

1. + 2. Übung: Vektorrechnung,
Lineare Gleichungssysteme und Lineare Abbildungen

Termine: Klausurvorbereitungskurs Mathematik II für MB (Klausur: 23.08.2011)

Datum	Uhrzeit	Ort	Thema
04.10.2011	11:00-12:40 Uhr	S202/C205	Vektorrechung und Lineare Gleichungssysteme
04.10.2011	14:45-16:25 Uhr	S103/226	Lineare Gleichungssysteme und Lineare Abbildungen
05.10.2011	11:00-12:40 Uhr	S202/C205	Reihen und Folgen
05.10.2011	14:45-16:25 Uhr	S103/226	Komplexe Zahlen, Abbildungen und Funktionen
06.10.2011	11:00-12:40 Uhr	S103/221	Differential- und Integralrechnung

Ggf. Themenverschiebungen möglich.

A1 Flächeninhalt eines Dreiecks
Bestimme den Flächeninhalt eines Dreiecks im dreidimensionalen Raum mit den Eckpunkten

$$P = (-1, 5, 3), \quad Q = (-1, 6, 6) \quad \text{und} \quad R = (1, 6, 9)$$

mit Hilfe des Vektorproduktes.

A2 Ebenen I
Gegeben seien die Ebenen $E_1 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 2$ und $E_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Berechne die Schnittgerade und den Schnittwinkel von E_1 und E_2.

A3 Abstand von Gerade und Ebene
Gegeben sei die Ebene

$$E : x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Bestimme in Abhängigkeit des Parameters s den Abstand der Punkte der Gerade zur Ebene. Für welchen Parameter s_0 wird dieser Abstand minimal?

A4 Ebenen II

In Abhängikeit vom reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ seien die drei Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad x + 2y + 3z = \alpha \\ E_2 &: \qquad\qquad y - z = 0 \\ E_3 &: x + \alpha^2 y + 4z = 1 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Die Schnittmenge $S = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ der drei Ebenen ist durch ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ bestimmt. Man bestimme für den Spezialfall $\alpha = 2$ die Schnittmenge S.

b) Berechne $\det A$ und bestimme die beiden Parameter α_1 und α_2, für die die Schnittmenge S nicht aus genau einem Punkt besteht. Man gebe in beiden Fällen die Schnittmenge S an.

c) Man gebe die Ebene $E_1 : x + 2y + 3z = 1$ in parametrischer Form an.

A5 Lineares Gleichungssystem

Löse das Gleichungssystem $Ax = b$ für die Daten

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A6 Struktur Linearer Gleichungssysteme

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme den Rang und Kern von A. Verifiziere hieran die Identität

$$\dim\ker(A) + \operatorname{rang}(A) = 5.$$

b) Betrachte nun das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (0, 2, 4, 4)^T$. Verifiziere, dass $x_s = (1, 1, 0, 0, 0)^T$ eine spezielle Lösung dieses inhomogenen Systems darstellt. Wie erhält man nun mit ihr die vollständige Lösungsmenge des Systems?

A7 Inverse einer 3×3-Matrix

Bestimme, ob folgende Matrizen invertierbar sind und berechne in diesem Fall die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

A8 Drehungen in $\mathbb{R}^2$

a) Wie lässt sich eine Drehmatrix $D(\phi) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Drehwinkel $\phi \in \mathbb{R}$ allgemein beschreiben?

b) Bestimme das Bild $D(\phi) \cdot x$ des Vektors $x = (-1, 2)^T$ nach Drehung um den Drehwinkel $\phi = \frac{3\pi}{2}$.

c) Bestimme die Abbildungsmatrix $D(\phi)^{-1}$ der Umkehrabbildung einer Drehung um den Winkel ϕ.

A9 Projektion auf eine Ebene

Man bestimme einen normierten Normalenvektor n zur Ebene $E : y - z = 0$ und gebe eine Matrix P an, die die senkrechte Projektion auf die Ebene E beschreibt.

A10 Zusammengesetzte lineare Abbildungen

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ in z-Richtung auf die x-y-Ebene projeziert und anschließend um die z-Achse um 90 Grad dreht.

a) Finde die Abbildungsmatrix C für diese lineare Abbildung f.

b) Finde die Abbildungsmatrix A für die orthgonale Projektion auf die x-y-Ebene und B für die 90-Grad-Drehung um die z-Achse.

c) Wir erwarten $C = BA$. Erkläre geometrisch, warum auch $C = AB$ gilt. Gilt immer $BA = AB$ für Abbildungsmatrizen, die eine zusammengesetzte lineare Abbildung beschreiben?

A11 Eigenwerte und Eigenvektoren

a) Bestimme die Eigenwerte und Basen der Eigenräume der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige invertierbare Matrix, und es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A. Zeige, dass dann v auch ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1} ist.

c) Zeige, dass B aus Teil a) invertierbar ist und bestimme die Eigenwerte und Basen der Eigenräume der Inversen B^{-1} von B.