



Klausurvorbereitungskurs Mathematik II für MB

5. Übung: Integrale im \mathbb{R}^n

A1 Integration über ein Rechteck

Es sei $R := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 \right\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_R x^3 \sqrt{y} \, d(x, y).$$

Spielt die Integrationsreihenfolge bei der Berechnung eine Rolle? Begründen Sie Ihre Antwort.

A2 Integration im \mathbb{R}^2

Es sei G das abgeschlossene Flächenstück im 1. Quadranten, das durch die Gerade $y = 2x$ und die Parabel $y = x^2$ begrenzt wird.

- Skizzieren Sie G .
- Ist G sowohl x - als auch y -projizierbar?
- Berechnen Sie $\int_G (x^2 + y^2) d(x, y)$.

A3 Substitutionsregel

Berechnen Sie für

$$B_R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

den Wert des Integrals

$$I_R = \int_{B_R} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) d(x, y)$$

in Abhängigkeit von $R \in (0, \infty)$ mittels geeigneter Koordinatentransformation.
Bestimme weiterhin den Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R$. Was hat man damit berechnet?

A4 Kugelkoordinaten

Berechnen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten das Dreifachintegral

$$\int_K x^2 \, d(x, y, z),$$

wobei K die Kugelschale zwischen den Kugelflächen

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \right\}$$

ist.