§4

4.1 Parameterintegral

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig

$g(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$

Integral: $\int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

Reihenfolge vertauschbar

Differentiation: $g'(y) = \int_a^b f_y(a,b)\,dx$

Integration und Differentiation vertauschbar.

Falls Integrationsgrenzen $a(y)$, $b(y)$ von y abhängen:

$$g'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(a,b)\,dx + f(b(y),y)\cdot b'(y) - f(a(y),y)\cdot a'(y)$$

Aufgabe 1: a) direkt: $g(y) = -\cos(x+y)\Big|_{y^2}^{2y^2} = -\cos(2y^2+y) + \cos(y^2+y)$

$\Rightarrow g'(y) = \sin(2y^2+y)(4y+1) - \sin(y^2+y)(2y+1)$

über Parameterintegral:

$f(x,y) := \sin(x+y)$ stetig & differenzierbar

$a(y) = y^2$, $b(y) = 2y^2$

$$\Rightarrow g'(y) = \int_{y^2}^{2y^2} \cos(x+y)\,dx + \sin(2y^2+y)\cdot 4y - \sin(y^2+y)\cdot 2y$$

$$= +\sin(x+y)\Big|_{y^2}^{2y^2} + \sin(2y^2+y)\cdot 4y - \sin(y^2+y)\cdot 2y$$

$$= \sin(2y^2+y)(4y+1) - \sin(y^2+y)(2y+1).$$

b) g explizit bestimmen?

Aber über Parameterintegral:

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy) - xy\cos(xy)}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = \frac{(x\cos(xy) - x\cos(xy) + \sin(xy)x^2y)}{x^2}$$

$$= y\cdot\sin(xy)$$

$$\Rightarrow g'(y) = \int_0^1 y\sin(xy)\,dx = -\cos(xy)\Big|_0^1 = 1-\cos(y)$$

Können nun auch g bestimmen:

$$g(y) = \int_0^y g'(\tilde{y})\,d\tilde{y} + g(0)$$

$$= \int_0^y 1-\cos(\tilde{y})\,d\tilde{y} + 0$$

$$= (\tilde{y} - \sin(\tilde{y}))\Big|_0^y = y - \sin(y).$$

4.2 Extrema unter Nebenbedingungen

f, g um x_0 stetig differenzierbar.

Falls f in x_0 (relatives) Extremum besitzt unter der Bedingung $g(x) = 0$ ~~so~~ und ist $\nabla g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

~~Diese Bedingung liefert nur notwendige~~

Diese Aussage liefert eine notwendige Bedingung für ein Extremum

Aufgabe ~~3~~ 4 auf 3. Übungsblatt:

$$f(x,y) = xy + e^{xy}, \quad K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1 \right\}$$

~~4x~~ ~~g(x,y)~~

Bestimmung ~~der~~ kritischer Punkte im Inneren über

$\nabla f(x,y) \overset{!}{=} (0,0)$ & Betrachtung der Hesse-Matrix.
($\Rightarrow$ Sattelpkt. in $(0,0)$)

Bestimmung kritischer Punkte auf dem Rand

$$\partial K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1 \right\} :$$

$$\rightsquigarrow \quad g(x,y) := x^2 + 4y^2 - 1$$

$$\nabla f(x,y) = (1 + e^{xy})(y, x)$$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 8y).$$

Kandidaten für Extrema sind: $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

$$(1 + e^{xy})(y, x) = \lambda (2x, 8y)$$

$$(y, x) = \tilde{\lambda} (2x, 8y), \quad \text{mit } \frac{\lambda}{(1 + e^{xy})} =: \tilde{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{y}{x} = \frac{1}{8}\frac{x}{y}}_{4y^2 = x^2}$$

$4y^2 = x^2$ in $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$
folgt $2x^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 1/\sqrt{8}$$

Bestimmen Typ des Extrema durch Einsetzen in $f(x,y)$:

$$f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{8}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 8}} + e^{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 8}}} \quad \text{Max.}$$

$$f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{8}) = f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{8}) = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 8}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 8}}} \quad \text{Min.}$$

4.3 Implizite Funktionen

Eine Funktion $g(x)$ ist durch die Gleichung

$$f(x, g(x)) = 0$$

implizit gegeben. Dabei ist $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$.

Ist f stetig partiell differenzierbar und $\binom{x_0}{y_0} \in U$ mit

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

dann gibt es stetig diffbare (lokal) Funktion g mit $g(x_0) = y_0$, $f(x, g(x)) \underset{\text{lokal}}{=} 0$

und $$g'(x) = \frac{-f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

Mehrdimensionale Verallgemeinerung:

$$F : \underset{\mathbb{R}^n \supset}{U} \times \underset{\subset \mathbb{R}^m}{V} \to \mathbb{R}^m, \quad \binom{x}{y} \longmapsto F\binom{x}{y} \quad \text{stetig diffbar}$$

und $\binom{x_0}{y_0} \in U \times V$ mit $F\binom{x_0}{y_0} = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x_0}{y_0} \text{ ist invertierbar } (m \times m\text{-Matrix})$$

$$\left(\text{d.h. } \det \frac{\partial F}{\partial y}\binom{x_0}{y_0} \neq 0\right)$$

dann gibt es stetig diffbares (lokal) Vektorfeld G mit $G(x_0) = y_0$, $F(x, G(x)) \underset{\text{lokal}}{=} 0$

und

$$DG(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, G(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, G(x)).$$

Aufgabe H3 aus 7. Übung (Mathe II):

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (4xy+2xz+4y-3z,\ xy+xz+yz+2x+2y-2z)$$

a) Zeige $F(x,y,z)=(0,0)$ bestimmt implizite Abbildung G in Umgebung von $x=0$ mit $G(0)=(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$.

$$F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad F(\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{0}}, \underbrace{\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3}}_{y_0\in\mathbb{R}^2}) = (0,0).$$

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 4y+2z \\ y+z+2 \end{matrix}}_{=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)} & \underbrace{\begin{matrix} 4x+4 & 2x-3 \\ x+z+2 & x+y-2 \end{matrix}}_{=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\right)\Big|_{(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3})} = \Big[(4x+4)(x+y-2)-(x+z+2)(2x-3)\Big]_{(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3})}$$

$$= 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3}) \text{ invertierbar.}$$

$\Rightarrow$ Es gibt Vektorfeld in Umgebung von $x=0$, so dass ~~[illegible]~~ $F(x, G(x)) = 0$; d.h. F bestimmt implizite Funktion.

b) Es gilt

$$DG(0) = -\frac{\partial F}{\partial y}(0,G(0))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(0,G(0))$$

$$= -\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{=:A}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -3/2 & 3 \\ -8/3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10/3 \\ 19/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/4 \\ -17/9 \end{pmatrix}.$$

~~Aufgabe 2.1~~

4.4 Wegintegral & Potential

$F: \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld,

$X: [a,b] \to U$ stetig differenzierbare Kurve

$\Rightarrow$ Wegintegral: $\int_a^b \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle \, dt =: \int_{\text{Spur} X} F \, dX$

Potentialfelder:

$F: U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld, $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$\varphi: U \to \mathbb{R}$ mit $\nabla \varphi = F$, dann heißt φ Potential (Stammfunktion) von F

$$\Rightarrow \int_{\text{Spur} X} F \, dX = \varphi(X(b)) - \varphi(X(a)).$$

~~Ist~~ F ~~Vektorfeld~~ Potentialfeld $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x_j} F_i = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \varphi = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j$

Berechnung von Potentialen: (2 dim.)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}, \quad \partial_y F_1 = \partial_x F_2$$

$$\varphi(x,y) = \int F_1(x,y) \, dx + g(y)$$

$$\varphi(x,y) = \int F_2(x,y) \, dy + h(x)$$

$\Rightarrow$ g und h vergleichen.

<u>Aufgabe A2:</u>

$$\int_\gamma F \cdot dX = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 (2t + e^{2t}) \, dt = \left[t^2 + \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^2 + 1).$$

Wegen $\partial_y F_1 = \partial_y (y^2) = 2y \neq 0 = \partial_x (z) = \partial_x F_2$

hat F kein Potential φ.

Es gibt also kein φ mit $\nabla \varphi = (y^2, z, e^{\sqrt{x}})$.

<u>Aufgabe 3:</u>

a) $$\int_\omega F \, dX = \int_0^1 \langle F(\cancel{\gamma}\, r(t)), r'(t) \rangle \, dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} \cos(\pi t) + 2t^2 \\ \sin(\pi t) + 2t^2 \\ \frac{1}{\pi} t + 2\pi^2 t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \pi \cos(\pi t) + 2\pi t^2 + \pi \sin(\pi t) + 2\pi t^2 + \frac{1}{\pi^2} t + 2\pi t^2 \, dt$$

$$= \int_0^1 \pi \cos(\pi t) + \pi \sin(\pi t) + 6\pi t^2 + \frac{1}{\pi^2} t \, dt$$

$$= \left[\sin(\pi t) - \cos(\pi t) + \frac{6}{3} \pi t^3 + \frac{1}{2\pi^2} t^2 \right]_0^1$$

$$= 0 + 1 + \frac{6}{3}\pi + \frac{1}{2\pi^2} + 1 = 2 + 2\pi + \frac{1}{2\pi^2}$$

b) $F(x,y,z) = (\cos x + 2yz, \sin y + 2xz, z + 2xy) = \nabla \varphi(x,y,z)$.

$$\varphi(x,y,z) = \int (\cos x + 2yz) \, dx + g(y,z) = \sin x + 2xyz + g(y,z)$$

$$\varphi(x,y,z) = \int (\sin y + 2xz) \, dy + h(x,z) = -\cos y + 2xyz + h(x,z)$$

$$\varphi(x,y,z) = \int (z + 2xy) \, dz + i(x,y) = \frac{z^2}{2} + 2xyz + i(x,y)$$

vergleichen g, h und i

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \sin x - \cos y + \frac{z^2}{2} + 2xyz + c.$$

$$\Rightarrow \int_\omega F \, dX = \varphi(r(1)) - \varphi(r(0)) = \varphi\begin{pmatrix} \frac{\pi}{\pi} \\ \frac{\pi}{\pi} \\ \frac{1}{\pi} \end{pmatrix} - \varphi(0)$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi^2} + 2\pi + 1 = 2 + 2\pi + \frac{1}{2\pi^2}.$$

Aufgabe 4:

a) $\partial_y F_1 = 0 = \partial_x F_2 \Rightarrow$ Potentialfeld mit

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \int 2x\,dx + h(y) = x^2 + h(y) \\ \varphi(x,y) &= \int 2y\,dy + g(x) = y^2 + g(y) \end{aligned}\right\} \varphi(x,y) = x^2 + y^2 + c.$$

b) $\partial_y F_1 = 2 = \partial_x F_2 \Rightarrow$ Potentialfeld mit

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \int 2y\,dx + h(y) = 2xy + h(y) \\ \varphi(x,y) &= \int 2x\,dy + g(x) = 2xy + g(x) \end{aligned}\right\} \varphi(x,y) = 2xy + c.$$