§3

3.1 Extrema

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$$

1) Kritische Punkte im Inneren bestimmen:

$$\nabla f(x,y) = 0$$

2) Minimum / Maximum / Sattelpunkt?

Betrachten Hessematrix: $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x,y) & \dots & \partial_n \partial_1 f(x,y) \\ \partial_1 \partial_2 f(x,y) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ \partial_1 \partial_n f(x,y) & \dots & \partial_n^2 f(x,y) \end{pmatrix}$

Alle Eigenwerte (EW) positiv $\Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow$ Minimum
" " negativ $\Rightarrow$ negativ definit $\Rightarrow$ Maximum
pos. und neg. EW $\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt
Determinante gleich 0 $\Rightarrow$ weitere Betrachtung notwendig.

2×2 - Matrizen:

$\det(\nabla^2 f(x,y))$	$\partial_1^2 f(x,y)$	
> 0	> 0	$\Rightarrow$ pos. def. $\Rightarrow$ Min.
> 0	< 0	$\Rightarrow$ neg. def. $\Rightarrow$ Max.
< 0		$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpkt.
$= 0$		$\Rightarrow$ nichts.

3) Randwerte betrachten

Aufgabe 1:

$\det A_1 = 4\cdot 1 - 2\cdot 2 = 0 \Rightarrow$ nichts davon.

$\left.\begin{array}{l}\det A_2 = 4\cdot 1 - 1\cdot 1 = 3 > 0 \\ a_{11} = 4\end{array}\right\} \Rightarrow$ positiv definit.

$\det A_3 = 4\cdot 1 - 3\cdot 3 = -5 < 0 \Rightarrow$ indefinit.

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist } 3\times 3\text{-Matrix}$$

$\Rightarrow$ über EW-Berechnung:

$$\det(A_6 - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -3 & -4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

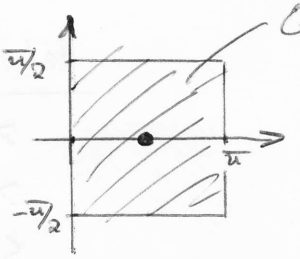
$$= -\lambda\big((-4-\lambda)(-\lambda) - 1\big) + 3\cdot 3\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 1) + 9\lambda = -\lambda\big(\lambda - (-2-\sqrt{4+10})\big)\cdot\big(\lambda - (-2+\sqrt{14})\big)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2-\sqrt{14} < 0,\ \lambda_3 = -2+\sqrt{14} > 0$

$\Rightarrow A_6$ ist nichts davon.

Aufgabe 2:



Schritt 1: $\nabla f(x,y) = (2\cos x, -3\sin y) = (0,0)$

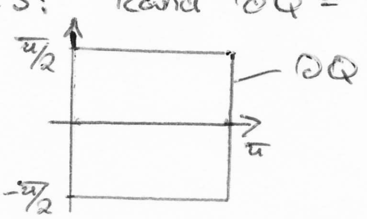
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2},\ y = 0$ (sonst nicht in Q)

Schritt 2: $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin x & 0 \\ 0 & -3\cos x \end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ neg. def. $\Rightarrow$ relatives Maximum

$f(\frac{\pi}{2}, 0) = 5.$

Schritt 3: Rand $\partial Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ und $x \in (0,\pi)$ oder $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $x \in \{0,\pi\}\}$



Funktionswerte für $x = 0,\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$f(0,y) = 3\cos y$ ist minimal bei $y \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$: $f(0, \pm\frac{\pi}{2}) = 0$

ist maximal bei $y = 0$: $f(0,0) = 3$

Funktionswerte für $x=\pi$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$f(\pi, y) = 3\cos y$ ist min. bei $y \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$: $f\left(\pi, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$

ist max bei $y = 0$: $f(\pi, 0) = 3$.

Funktionswerte für $y = \pm\frac{\pi}{2}$, $x \in (0, \pi)$:

$f\left(x, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x$ ist min. bei $x \in (0,\pi)$: $f\left(0, \pm\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\pi, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$

ist max. bei $x = \pi/2$: $f\left(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

$\Rightarrow$ f hat absolutes Maximum in $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

mit $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 5$.

f hat an allen vier Ecken absolutes Minimum.

Aufgabe 3:

a) $\nabla f(x,y) = \left(y + ye^{xy}, x + xe^{xy}\right) \stackrel{!}{=} (0,0)$

$\Rightarrow$ $x = y = 0$, da $(1 + e^{xy}) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

kritischer Punkt $(x,y) = (0,0)$.

Typ prüfen: $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & 1 + e^{xy} + xye^{xy} \\ 1 + e^{xy} + xye^{xy} & x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$

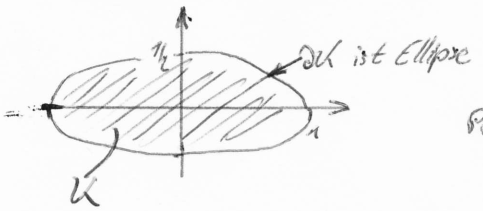
$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det \nabla^2 f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$

Hesse-Matrix ist am kritischen Punkt negativ

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0,0)$.

b) Randwerte prüfen: $\partial K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\right\}$



$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \cos\varphi,\ y = \frac{1}{2}\sin\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi)\right\}$

Polarkoordinaten

$g(\varphi) := f\left(\cos\varphi, \frac{1}{2}\sin\varphi\right) = \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi + e^{\frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi}$.

Max, Min bestimmen:

$$g'(\varphi) = \frac{1}{2} \underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{= \cos(2\varphi) \text{ (Additionstheorem)}} \left(1 + e^{\frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi}\right)$$

$$g''(\varphi) = -\sin(2\varphi)\left(1 + e^{\frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi}\right) + \left(\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right)^2 e^{\frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi}$$

Notwendige Bedingung für Extrema: $g'(\varphi) = 0$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}, \quad \varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$$

$$g''(\varphi_1) = -1 \cdot \underbrace{\left(1 + e^{\frac{1}{2}\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_1}\right)}_{>0} < 1 \Rightarrow \text{Max. bei } \left(\cos\varphi_1, \frac{1}{2}\sin\varphi_1\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

$g''(\varphi_2) > 0 \Rightarrow$ Min bei $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$g''(\varphi_3) < 0 \Rightarrow$ Max bei $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$g''(\varphi_4) > 0 \Rightarrow$ Min bei $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$\Rightarrow$ Globale Maxima bei $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Globale Minima bei $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

3.2 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Kurve: $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

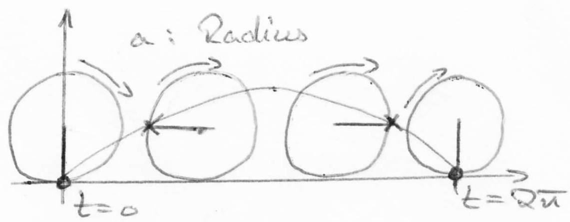
stetig und stückweise differenzierbar

Tangente in $X(t_0)$: $(T_{t_0}X)(t) = X(t_0) + (t-t_0)X'(t_0)$

Bogenlänge: $L = \int_a^b \| X'(t) \| \, dt$

(falls $X(t)$ Graph einer Funktion: $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2} \, dt$.

Aufgabe 4:



a) Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi} \| \kappa'(t) \| \, dt = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1-2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}} \, dt$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} \, dt$$

$$= \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)} \, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$$

$1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$

$$= 2a \left[-2\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8a$$

b) $$T(t) = \kappa(\pi) + (t-\pi)\,\kappa'(\pi)$$

$$= a\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} + (t-\pi)\begin{pmatrix} a - \cos(t)\cdot a \\ -a\sin(t) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=\pi}$$

$$= a\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} + (t-\pi)\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= t\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi a \\ 2a \end{pmatrix}.$$