Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
13.06.-15.06.11

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Parameterintegrale)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 y^2 \sin(xy) dy \Big) dx$$

auf zwei Arten: direkt und durch Austausch der Integrationsreihenfolge.

Lösung:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 y^2 \sin(xy) dy \Big) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\frac{y^2}{x} \cos(xy) \Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{2}{x} \int_0^1 y \cos(xy) dy \Big) dx =$$

$$\boxed{u = y^2 \quad dv = \sin(xy)dy \quad du = 2ydy \quad v = -\tfrac{1}{x}\cos(xy)}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\frac{\cos(x)}{x} + \frac{2}{x} \Big(\frac{y}{x} \sin(xy) \Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{x} \int_0^1 \sin(xy) dy \Big) \Big) dx =$$

$$\boxed{u = y \quad dv = \cos(xy)dy \quad du = dy \quad v = \tfrac{1}{x}\sin(xy)}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\frac{\cos(x)}{x} + \frac{2}{x} \Big(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \cos(xy) \Big|_{y=0}^{y=1} \Big) \Big) dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\frac{\cos(x)}{x} + \frac{2}{x} \Big(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \Big) \Big) dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2\cos(x) - 2}{x^3} \, dx = 0$$

Dieses Integral ist Null, weil wir eine ungerade Funktion auf einem symmetrischen Interval integrieren (wenn wir diese Funktion in eine Taylorreihe entwickeln, sehen wir, dass es auch im Punkt Null kein Problem gibt).
Durch Austausch der Integrationsreihenfolge geht es viel leichter (wir können die Integrale tauschen, weil $y^2 \sin(xy)$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ stetig ist).

$$\int_0^1 \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \sin(xy) dx \Big) dy = \int_0^1 0 \; dy = 0$$

Aufgabe G2 (Parameterintegrale)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils deren Ableitung explizit. Geben Sie zwei Lösungswege an:

- indem Sie $f(x)$ bestimmen und ableiten,
- indem Sie den Integrand partiell differenzieren.

(a) $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(y)dy$

(b) $f(x) = \int_0^{x^2} (1-x^3)(1-2xy+y^2)dy$

Lösung:

(a)

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(y)dy = \sin(x)\sin(y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = \sin(x), \qquad f'(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\sin(x)\cos(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(y)dy = \cos(x)\sin(y)\Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = \cos(x)$$

(b)

$$f(x) = \int_0^{x^2} (1-x^3)(1-2xy+y^2)dy = (1-x^3)(y-xy^2+\frac{1}{3}y^3)\Big|_{y=0}^{y=x^2} =$$

$$= (1-x^3)(x^2-x^5+\frac{1}{3}x^6) = -\frac{1}{3}x^9+x^8+\frac{1}{3}x^6-2x^5+x^2, \qquad f'(x) = -3x^8+8x^7+2x^5-10x^4+2x$$

Für die nächste Berechnung benutzen wir die Formel

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy \ + \ f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x).$$

$$f'(x) = \int_0^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(1-x^3)(1-2xy+y^2)dy + (1-x^3)(1-2x^3+x^4)2x - 0 =$$

$$= \int_0^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(1-2xy+y^2-x^3+2x^4y-x^3y^2)dy + (-x^7+2x^6+x^4-3x^3+1)2x =$$

$$= \int_0^{x^2} (-2y-3x^2+8x^3y-3x^2y^2)dy - 2x^8+4x^7+2x^5-6x^4+2x =$$

$$= -y^2-3x^2y+4x^3y^2-x^2y^3\Big|_{y=0}^{y=x^2} - 2x^8+4x^7+2x^5-6x^4+2x =$$

$$= -x^4-3x^4+4x^7-x^8-2x^8+4x^7+2x^5-6x^4+2x = -3x^8+8x^7+2x^5-10x^4+2x$$

Aufgabe G3 (Wegintegrale)

Sei die Kurve W die Schnittmenge von dem Zylinder $x^2+y^2=1$ und der Ebene $x+y+z=1$ im Raum $\mathbb{R}^3$.

(a) Parametrisieren Sie W.

(b) Berechnen Sie $\int_W F$, wo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein Vektorfeld, gegeben durch

$$F(x,y,z) = (x+z, y+z, x^2+y^2).$$

Lösung:

(a) $W\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, W(t) = \big(\cos(t), \sin(t), 1-\cos(t)-\sin(t)\big)$

(b)
$$\int_W F = \int_0^{2\pi} F(W(t)) \cdot \dot{W}(t)dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(1-\sin(t), 1-\cos(t), 1\big) \cdot \big(-\sin(t), \cos(t), \sin(t)-\cos(t)\big)dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(-\sin(t) + \sin^2(t) + \cos(t) - \cos^2(t) + \sin(t) - \cos(t)\big)dt =$$
$$= -\int_0^{2\pi} \cos(2t)dt = -\frac{\sin(2t)}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Aufgabe G4 (Zusatzaufgabe)
Parametrisieren Sie die Teile der Kurve im $\mathbb{R}^2$, die auf der $x-$Achse vom Nullpunkt bis zum Punkt $(2,0)$ läuft, danach auf einem Halbkreis (Mittelpunkt ist $(2,1)$, Radius ist 1) durch $(3,1)$ nach oben zum Punkt $(2,2)$ und dann von diesem Punkt zurück auf die $y-$Achse zum Punkt $(0,1)$ und schliesslich zurück in den Nullpunkt. Diese Kurve soll im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Lösung:

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= (0,t), \quad t \in [0,1],\\
c_2(t) &= (t, 1+\frac{t}{2}), \quad t \in [0,2],\\
c_3(t) &= (2+\sin(t), 1+\cos(t)), \quad t \in [0,\pi],\\
c_4(t) &= (2-t, 0), \quad t \in [0,2].
\end{aligned}$$

Hausübung

– Abgabe am 20.06.-22.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Parameterintegrale) (4 Punkte)

Seien F und G stetig differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie, dass

$$y = -e^{-F(x)} \int_0^x e^{F(t)} G(t) dt$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + F'(x)y + G(x) = 0$$

ist.

Lösung:

$$y' = -e^{-F(x)}(-F'(x)) \int_0^x e^{F(t)} G(t) dx - e^{-F(x)} \Big(\int_0^x 0 dt + e^{F(x)} G(x) \cdot 1 - 0 \Big) = -F'(x)y - G(x)$$

Aufgabe H2 (Parameterintegrale) (6 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils deren Ableitung explizit.

(a) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \arctan(xy) dy$

(b) $f(x) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}x}^{\frac{\pi}{6}x} \cos\big(\frac{y}{x}\big) dy$

Lösung:

(a)

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \arctan(xy) dy = \int_0^1 \frac{y}{1+(xy)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2x^2} \ln(1 + x^2 y^2) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}$$

(b)

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{6}x}^{\frac{\pi}{6}x} \cos\big(\frac{y}{x}\big) dy = x \sin\big(\frac{y}{x}\big) \Big|_{y=-\frac{\pi}{6}x}^{y=\frac{\pi}{6}x} = x, \qquad f'(x) = 1$$

Aufgabe H3 (Wegintegrale) (10 Punkte)

Seien

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1} \quad \text{und} \quad G(x,y) = (\nabla f)(x,y).$$

Seien W und Z zwei Wege von $(1,0)$ zu $(-1,0)$: die Strecke zwischen diesen Punkten und der obere Halbkreis mit Radius 1.

Berechnen Sie die Integrale $\int_W G$ und $\int_Z G$. Vergleichen Sie sie mit $f(-1,0) - f(1,0)$.

Lösung:

$$W\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad W(t) = (-t, 0)$$
$$Z\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad Z(t) = (\cos(t), \sin(t))$$
$$G(x,y) = (\nabla f)(x,y) = \left(\frac{-x^2+y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}, \ \frac{-2xy}{(x^2+y^2+1)^2} \right)$$

$$\int_W G = \int_{-1}^{1} G(W(t)) \cdot \dot{W}(t) dt = \int_{-1}^{1} \Big(\frac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}, 0 \Big) \cdot (-1, 0) dt =$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} dt = - \frac{t}{t^2+1}\Big|_{-1}^{1} = -1$$

$$\int_Z G = \int_0^{\pi} G(Z(t)) \cdot \dot{Z}(t) dt = \int_0^{\pi} \Big(\frac{-\cos(2t)+1}{4}, \ \frac{-\sin(2t)}{4} \Big) \cdot \big(-\sin(t), \cos(t) \big) dt =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\cos(2t)\sin(t) - \sin(t) - \sin(2t)\cos(t)}{4} \ dt =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(-2t)\cos(t) + \cos(-2t)\sin(t) - \sin(t)}{4} \ dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(-2t+t) - \sin(t)}{4} \ dt =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{-\sin(t)}{2} \ dt = \frac{\cos(t)}{2}\Big|_0^{\pi} = -1$$

$$f(-1,0) - f(1,0) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Alle drei Werte sind gleich.
Bemerkung: Das geschieht immer, wenn G ein Gradient ist.