Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
06.06.-08.06.11

8. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Verpackungsminimierung)

Es soll eine rechteckige Schachtel ohne Deckel mit vorgeschriebenem Volumen V_0 hergestellt werden, wobei die Produktionskosten möglichst gering ausfallen sollen. Sind x, y die Seitenlängen und z die Höhe dieser Schachtel, so sind ihr Volumen V und ihre Oberfläche S gegeben durch

$$V(x,y,z) = xyz, \quad S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz.$$

Da die Herstellungskosten proportional zur Oberfläche sind, handelt es sich also um die Bestimmung des Minimums der Funktion S unter der Nebenbedingung $V(x,y,z) = V_0$. Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie aus der Nebenbedingung die Variable z eliminieren, diese dann in S einsetzen und nun $s(x,y) := S(x,y,z(x,y))$ auf Extremstellen untersuchen.

Lösung: Aus der Nebenbedingung $V(x,y,z) = xyz = V_0$ folgt $z = \frac{V_0}{xy}$ (für $x, y \neq 0$, was gewährleistet sein muss). Die Aufgabe lautet also: Minimiere die Funktion

$$s(x,y) = S(x,y,\frac{V_0}{xy}) = xy + 2\frac{V_0}{y} + 2\frac{V_0}{x}.$$

Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte:

$$\nabla s(x,y) = (y - 2\frac{V_0}{x^2}, x - 2\frac{V_0}{y^2}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff \left.\begin{array}{ll} (i) & y = 2\frac{V_0}{x^2} \\ (ii) & x = 2\frac{V_0}{y^2} \end{array}\right\} \implies x = \frac{2V_0}{(\frac{2V_0}{x^2})^2} = \frac{x^4}{2V_0}$$

$$\implies x^3 = 2V_0 \implies x_0 = \sqrt[3]{2V_0},\ y_0 = \sqrt[3]{2V_0}.$$

Es gilt

$$(\mathrm{Hess} f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V_0}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V_0}{y^3} \end{pmatrix}, \text{ also } (\mathrm{Hess} f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Hessematrix in (x_0, y_0) positiv definit.
In (x_0, y_0) liegt also ein Minimum vor. Der zugehörige $z-$Wert ist $z_0 = \frac{V_0}{x_0 y_0} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V_0}$. Zusammenfassend gesagt hat also die Funktion $S(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $V(x,y,z) = V_0$ ein Minimum bei $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V_0}$, $z_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V_0}$.

Aufgabe G2 (Extrema unter Nebenbedingungen)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y,z) = x + y + (z - \frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \ .$$

Wie sieht das 0-Niveau von g aus?

Lösung: $g(x,y,z) = 0$ bestimmt einen Kegel in $\pm z$-Richtung mit jeweiliger Spitze im Ursprung. Vergleich der Gradienten von f und g

$$\mathrm{grad}_{(\mathrm{x,y,z})}\mathrm{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(z - \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} = \lambda \ \mathrm{grad}_{(\mathrm{x,y,z})}\mathrm{g}$$

ergibt $x = y = \frac{1}{2\lambda}$ und $z = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\lambda)}$. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert $2\frac{1}{(2\lambda)^2} = \frac{1}{2(1+\lambda)^2}$, also $2\lambda^2 = 2(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$ und damit $\lambda = -\frac{1}{2}$. Als kritischen Punkt erhalten wir somit $(-1, -1, \sqrt{2})$. Doch der Gradient von g verschwindet in $(0,0,0)$ und dieser Punkt gehört auch zum Kegel. Also haben wir dort noch einen kritischen Punkt (der pathologische Fall).

Aufgabe G3 (Arithmetisches und geometrisches Mittel dreier Zahlen)

(a) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x,y,z) = x + y + z$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = xyz - 1 = 0$, sowie $x, y, z > 0$.

(b) Leiten Sie aus (a) die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel her: Für $x, y, z > 0$ gilt stets

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

Lösung:

(a) Vergleich der Gradienten von f und g

$$\mathrm{grad}_{(\mathrm{x,y,z})}\mathrm{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \lambda \ \mathrm{grad}_{(\mathrm{x,y,z})}\mathrm{g}$$

ergibt durch Multiplizieren der ersten Zeile mit $x > 0$, der zweiten Zeile mit $y > 0$ und der dritten Zeile mit $z > 0$:

$$xyz = \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\lambda} = \frac{z}{\lambda}, \text{ also } x = y = z.$$

Eingesetzt in die Nebenbedingung erhalten wir $xyz = x^3 = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$ und einen Minimalwert von $f(1,1,1) = 3$.

(b) Setze $\tilde{x} = \frac{x}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}$, $\tilde{y} = \frac{y}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}$, $\tilde{z} = \frac{z}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}$.
Dann gilt $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} = 1$. Mit dieser „Nebenbedingung“ erhalten wir laut (a) $\frac{x+y+z}{(xyz)^{\frac{1}{3}}} = \tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z} \geq 3$.
Und somit ist $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.

Hausübung

– Abgabe am 14.06.-15.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Extrema unter Nebenbedingungen) (5 Punkte)

Bestimmen Sie das Maximum von

$$f(x,y) = xy$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x + y = 1\ .$$

Wie sieht das 1-Niveau von g aus?

Lösung: Zu betrachten ist die (zum 0-Niveau umgeformte) Nebenbedingung $\tilde{g}(x,y) = x+y-1 = 0$.

Vergleich der Gradienten

$$\mathrm{grad}_{(\mathrm{x,y})}\mathrm{f} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{grad}_{(\mathrm{x,y})}\tilde{\mathrm{g}}$$

ergibt $x = y = \lambda$. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert $\lambda = \frac{1}{2}$ und damit liegt der einzige kritische Punkt bei $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Man prüft leicht nach, dass an diesem das Maximum mit dem Wert $\frac{1}{4}$ angenommen wird.

(Der Gradient von $\tilde{g}$ wird offensichtlich nie Null, es gibt also keinen pathologischen Fall.)

Alternativ ergibt sich aus der Nebenbedingung $y = 1 - x$, was in f eingesetzt den Ausdruck $x(1-x)$ liefert, welcher, wie man leicht sieht, bei $x = 1/2 (= y)$ maximal wird und den Wert $1/4$ liefert.

Das 1-Niveau von g ist die Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch die Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$.

Aufgabe H2 (Extrema auf einer Kreisscheibe) (9 Punkte)

Finden Sie den kleinsten und größten Wert der Funktion $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ auf der Kreisscheibe, gegeben durch $x^2 + y^2 \leq 1$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren des Kreises und dann auf dessen Rand, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung:

(i) Lokale Extrema im Inneren $\overset{\circ}{K} := \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ von K:

$$\mathrm{grad}\, f(x,y) = (8x - 3y, -3x) = (0,0) \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Nun ist $(\mathrm{Hess} f)(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = (\mathrm{Hess} f)(0,0)$. Da $(\mathrm{Hess} f)(x,y)$ an der Stelle $(0,0)$ indefinit ist, besitzt f keine lokalen Extrema im Inneren von K.

(ii) Lokale Extrema auf dem Rand $\delta K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ von K:
Man bestimmt also die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
& \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\
\Longleftrightarrow\quad & (8x - 3y, -3x) = \lambda(2x, 2y) \\
\Longleftrightarrow\quad & (8x - 3y = 2\lambda x) \wedge (-3x = 2y) \\
\Longleftrightarrow\quad & ((8 - 2\lambda)x - 3y = 0) \wedge (x = -\frac{2}{3}\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\quad & ((8 - 2\lambda)(-\frac{2}{3}\lambda y) - 3y = 0) \wedge (x = -\frac{2}{3}\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\quad & ((\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0) \vee (y = 0)) \wedge (x = -\frac{2}{3}\lambda y)
\end{aligned}$$

Fall 1: $(y = 0) \Rightarrow x = 0$, aber $g(0,0) \neq 0 \Rightarrow$ist keine Lösung.
Fall 2: $(y \neq 0)$

$$(\frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{16}{3}\lambda - 3 = 0) \Longleftrightarrow (\lambda = -\frac{1}{2}) \vee (\lambda = \frac{9}{2}).$$

Also $(x,y) = (\frac{1}{3}y, y)$ oder $(x,y) = (-3y, y)$ als mögliche Extrema:

$$\begin{aligned}
g(\frac{1}{3}y, y) &= \frac{10}{9}y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (y = -\frac{3}{\sqrt{10}}) \vee (y = \frac{3}{\sqrt{10}}) \\
g(-3y, y) &= 10y^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (y = -\frac{1}{\sqrt{10}}) \vee (y = \frac{1}{\sqrt{10}}). \\
\Longrightarrow & \quad \mathbf{P_1} = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}), \mathbf{P_2} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}), \\
& \quad \mathbf{P_3} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}), \mathbf{P_4} = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})
\end{aligned}$$

mit $f(\mathbf{P_1}) = f(\mathbf{P_2}) = -\frac{1}{2}$ und $f(\mathbf{P_3}) = f(\mathbf{P_4}) = \frac{9}{2}$ sind die möglichen Extremalstellen auf dem Rand von K.

Da der Rand von K kompakt und f stetig ist und im Inneren von K keine Extrema liegen, sind $\mathbf{P_1}$ und $\mathbf{P_2}$ die Minima und $\mathbf{P_3}$ und $\mathbf{P_4}$ die Maxima von f auf K.

Aufgabe H3 (Minimaler Abstand) (6 Punkte)

Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $M = (4p, p)$ und der Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$ für $p > 0$.

Lösung: Wir suchen die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = (x - 4p)^2 + (y - p)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$, wobei $g(x,y) = y - \frac{x^2}{2p}$.
Die möglichen Extremwerte sind die Lösungen des Systems
$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$, $g(x,y) = 0$, also

$$\begin{aligned}
& 2(x - 4p) = \lambda \cdot \frac{-x}{p}, \quad 2(y - p) = \lambda, \quad y - \frac{x^2}{2p} = 0 \\
\Rightarrow \quad & x = \frac{8p^2}{\lambda + 2p}, \quad y = \frac{\lambda + 2p}{2}, \quad y = \frac{x^2}{2p} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\lambda + 2p}{2} = \frac{1}{2p} \frac{64p^2}{(\lambda + 2p)^2} \\
\Rightarrow \quad & (\lambda + 2p)^3 = 64p^3 \Rightarrow \lambda = 2p \\
\Rightarrow \quad & x = 2p, y = 2p.
\end{aligned}$$

Der minimale Abstand ist somit $\sqrt{f(2p, 2p)} = \sqrt{(2p - 4p)^2 + (2p - p)^2} = p\sqrt{5}$.