Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
30.05.-01.06.11

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

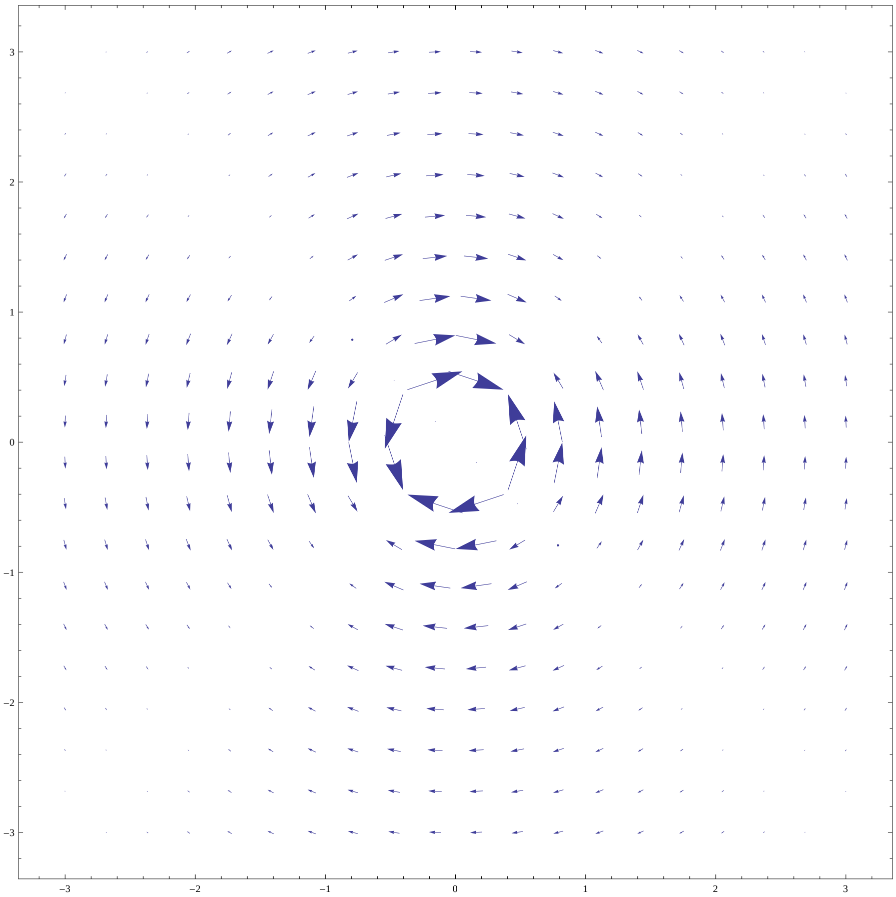
Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gradientenvektorfeld)

Zeichnen Sie das Gradientenvektorfeld der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Lösung: $(\nabla f)(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot [-y, x]^T$



Um dieses Bild zu kriegen, kann man einfach ∇f in einigen Punkten berechnen, aber man erhaltet einen besseren Eindruck vom Ausdruck des Gradienten in Polarkoordinaten:

$$(\nabla f)(r,\varphi) = \frac{\cos(2\varphi)}{r}[-\sin(\varphi), \cos(\varphi)]^T.$$

Aufgabe G2 (Jacobi-Matrix und Kettenregel)
Wir setzen

- $f(x,y) = (e^{xy}, x-y)$,
- $g(x,y) = xy$ und
- $h = g \circ f$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen (Funktionalmatrizen) von f und g.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von h auf zwei Arten: direkt und mit der Kettenregel.

Lösung:

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad J_g(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}$$

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = e^{xy}(x-y) \qquad J_h(x,y) = \begin{bmatrix} ye^{xy}(x-y) + e^{xy} & xe^{xy}(x-y) - e^{xy} \end{bmatrix}$$

$$\text{Kettenregel:} \qquad J_h(x,y) = J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y) = \begin{bmatrix} x-y & e^{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x-y)ye^{xy} + e^{xy} & (x-y)xe^{xy} - e^{xy} \end{bmatrix}$$

Aufgabe G3 (Implizite Funktionen)
Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = xy(x+y).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

(b) Überzeugen Sie sich, dass es eine Funktion g, definiert in einer Umgebung des Punktes $x = 1$, gibt, sodass die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ gilt. Wieviele solche differenzierbare Funktionen gibt es?

(c) Für alle diese implizite Funktionen berechnen Sie ihre Ableitungen in $x = 1$.

Lösung:

(a) $J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy \end{bmatrix}$

(b) Die Gleichuing $f(1,y) = 0$, also $y + y^2 = 0$, hat zwei Lösungen: $y_1 = 0$ und $y_2 = -1$. Für beide ist die zweite Zahl in J_f, das heißt, $x^2 + 2xy$, nicht Null:

$$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 1, \qquad 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

Deshalb gibt es zwei differenzierbare Funktionen in einer Umgebung des Punktes $x = 1$, für die die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ gilt.

Bemerkung: In diesem Fall ist es ganz einfach sie explizit zu geben: $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = -x$.

(c) Wir nutzen die Formel $g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))}$.

$$g_1'(1) = -\frac{0}{1} = 0 \qquad g_2'(1) = -\frac{-1}{-1} = -1$$

Bemerkung: Natürlich wenn man explizit g schreiben kann, kann man es auch direkt ableiten.

Hausübung

– Abgabe am 06.06.-08.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Extremwertberechnung) (7 Punkte)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

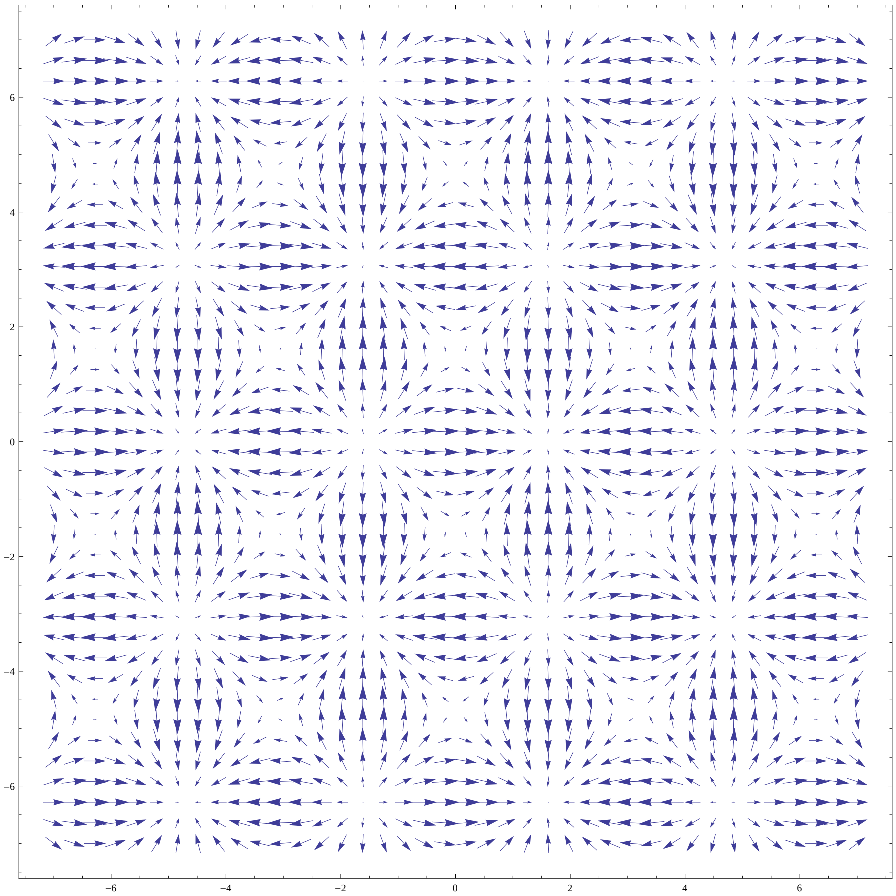
$$f(x, y) = \sin(x)\cos(y).$$

(a) Zeichnen Sie das Gradientenvektorfeld von f.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f.

Lösung:

(a) $(\nabla f)(x, y) = [\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y)]^T$



(b) Zuerst finden wir die Nullstellen des Gradienten. Beide Sinus und Kosinus kann nicht in demselben Punkt Null sein, sodass die kritische Stellen in Punkte, wo $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$ sowie auch wo $\sin(x) = 0$, $\cos(y) = 0$, sind. Die Menge der kritischen Stellen is dann

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, l\pi\right) \,\middle|\, k, l \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi\right) \,\middle|\, k, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Hesse-Matrix und ihre Determinante sind

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \det H_f(x,y) = \sin^2(x)\cos^2(y) - \cos^2(x)\sin^2(y) =$$
$$= (1-\cos^2(x))\cos^2(y) - \cos^2(x)(1-\cos^2(y)) = \cos^2(y) - \cos^2(x).$$

Wir sehen, dass $\Delta = 1 > 0$ in Punkten $\big(\frac{\pi}{2}+k\pi, l\pi\big)$ ist, sodass hier haben wir Extremstellen, und zwar lokale Minima in $\big(\frac{\pi}{2}+2m\pi,(2n+1)\pi\big)$ und $\big(\frac{\pi}{2}+(2m+1)\pi, 2n\pi\big)$ (weil dort $-\sin(x)\cos(y) = 1 > 0$) und lokale Maxima in $\big(\frac{\pi}{2}+2m\pi, 2n\pi\big)$ und $\big(\frac{\pi}{2}+(2m+1)\pi,(2n+1)\pi\big)$ (wo $-\sin(x)\cos(y) = -1 < 0$). Man kann das auch aus dem Gradientenvektorfelden lesen: es hat die Quellen in Minima und die Senke in Maxima. In $\big(k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi\big)$ haben wir Sattelpunkte, weil dort $\Delta = -1 < 0$ ist.

Aufgabe H2 (Invertierbare Matrizen) (6 Punkte)

Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 42 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die inversen Matrizen von denen, die invertierbar sind.

Lösung: Die invertierbare Matrizen sind die, von denen Determinante nicht Null ist.

$$\det A = -2 \qquad \det B = 1 \qquad \det C = 0 \qquad \det D = 42$$

Man kann die inversen Matrizen z.B. mit der Adjunkte berechnen.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 3.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{42} \end{bmatrix}$$

Aufgabe H3 (Implizite Funktionen) (7 Punkte)

Die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(x,y,z) = \big(4xy + 2xz + 4y - 3z,\ xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z\big).$$

(a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $F(x,y,z) = (0,0)$ bestimmt eine (differenzierbare) implizite Abbildung G in einer Umgebung des Punktes $x = 0$, für die $G(0) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von G im Punkt $x = 0$.

Lösung:

(a)

$$J_F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4y+2z & 4x+4 & 2x-3 \\ y+z+2 & x+z+2 & x+y-2 \end{bmatrix}$$

Es gibt so eine Abbildung G, weil die Gleichung $F(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3}) = (0,0)$ gilt und für $(x,y,z) = (0,\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ die Determinante

$$\det \begin{bmatrix} 4x+4 & 2x-3 \\ x+z+2 & x+y-2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = 2$$

nicht Null ist.

(b)

$$J_G(0) = -\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{8}{3} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} \\ -\frac{17}{9} \end{bmatrix}$$