Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
23.05.-25.05.11

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Taylorapproximation)

Sei $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^y := e^{y \ln(x)}$.

(i) Wählen Sie geschickt einen Punkt $(x_0, y_0) \in D$, so dass Sie mit Hilfe der Ableitung gut eine Näherung des Funktionswertes an der Stelle $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1.02, 3.01)$ angeben können.

(ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2.Ordnung von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 3)$ und errechnen Sie damit eine Näherung des Funktionswertes an der Stelle $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1.02, 3.01)$.

Lösung:

(i)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x)x^y \\
\Longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,3)} &= 3, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,3)} = 0 \\
f(1.02, 3.01) &\approx f(1, 1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,3)}(1.02 - 1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,3)}(3.01 - 3) \\
&= 1.06
\end{aligned}$$

Der echte Wert ist: $f(1.02, 3.01) = 1.0614182$

(ii)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y(y-1)x^{y-2}, & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,3)} &= 6, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= x^{y-1} + \ln(x)yx^{y-1}, & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(1,3)} &= 1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (\ln x)^2 x^y, & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,3)} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1.02, 3.01) &\approx f(1, 3) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,3)}(1.02 - 1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,3)}(3.01 - 3) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,3)}(1.02 - 1)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(1,3)}(1.02 - 1)(3.01 - 3) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,3)}(3.01 - 3)^2\right] \\
&= 1,0614
\end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Hustensaft)

Die Wirkung $W(x,t)$ von x ml Hustensaft t Minuten nach deren Einnahme werde durch eine Funktion der Form

$$W(x,t) = cx^2(30-x)t^2e^{-t}$$

beschrieben, wobei c ein positiver Parameter ist.

(i) Geben Sie das Taylor-Polynom von W der Ordnung 2 im Punkt $(x_0, t_0) = (1, 0)$ an.

(ii) Bestimmen Sie die Kombination(en) von Dosis x und Zeit t, bei denen die Wirkung maximal wird.

Lösung: **(i)** $W(x,t) = cx^2(30-x)t^2e^{-t}$

$$\operatorname{grad} W = \begin{pmatrix} 3cx(20-x)t^2e^{-t} \\ cx^2(30-x)t(2-t)e^{-t} \end{pmatrix}$$

sowie

$$H_w = ce^{-t}\begin{pmatrix} 6(10-x)t^2 & 3x(20-x)t(2-t) \\ 3x(20-x)t(2-t) & x^2(30-x)(t^2-4t+2) \end{pmatrix}$$

Damit ist das Taylor-Polynom zu W in $(1,0)$ gegeben durch $(x,t) \mapsto 29ct^2$.

(ii) Berechnung der Kritischen Punkte

$$\operatorname{grad} w = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 3cx(20-x)t^2e^{-t} \\ cx^2(30-x)t(2-t)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix}.$$

Aus I folgt dann $t = 0$, $x = 0$ oder $x = 20$. Laut Aufgabenstellung ist nur $x = 20$ sinnvoll. Aus II folgt mit $x = 20$, dass $t = 0$ oder $t = 2$. Es ist nur $t = 2$ sinnvoll. Damit lautet der (interessante) kritische Punkt $P = (20, 2)$. Es folgt dass $\det(H_w(P)) > 0$ und $w_{xx}(P) < 0$, also ist P ein (lokales) Maximum.

Aufgabe G3 (Hessematrix)

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\operatorname{Hess} f)(0,0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Widerspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

Lösung: Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (nx^{n-1}, ny^{n-1})$. Für $n \geq 2$ liegt also bei $(0,0)$ eine kritische Stelle vor.

Ist n **gerade**, so gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ daß $f(x,y) > 0$. Da für $n \geq 2$ gilt $f(0,0) = 0$, liegt ein isoliertes Minimum vor.

Ist n **ungerade**, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ daß $f(\varepsilon,\varepsilon) > 0$ und $f(-\varepsilon,-\varepsilon) < 0$. Bei $(0,0)$ liegt also keine lokale Extremstelle vor.

Die Hessematrix in $(0,0)$ ist

$$\begin{aligned}(\operatorname{Hess}(f))(x,y)|_{(x,y)=(0,0)} &= \begin{pmatrix} n(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & n(n-1)x^{n-2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,0)} \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{falls } n \geq 3 \\[2ex] \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{falls } n = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Die Hessematrix ist also nur im Fall $n = 2$ positiv definit. In diesem Fall liegt auch ein lokales Minimum vor. In allen anderen Fällen ist sie positiv (und negativ) semidefinit. Es gibt also Fälle, in denen die Hessematrix positiv semidefinit ist, aber kein lokales Minimum vorliegt. Dies widerspricht natürlich nicht den Aussagen der Vorlesung, da die Bedingung war, daß die Hessematrix in dem entsprechenden Punkt positiv definit ist. Ausserdem gibt es Fälle, in denen ein Minimum vorliegt (nämlich n gerade und größer als 2), in denen die Hessematrix nicht positiv definit ist. Das liegt daran, dass die positive Definitheit zwar ein *hinreichendes* Kriterium ist, aber nicht notwendig. Schliesslich zeigt die Aufgabe, daß die Indefinitheit von $(\mathrm{Hess} f)$ in einem Punkt keine notwendige Bedingung dafür ist, daß keine lokale Extremstelle vorliegt.

Hausübung

– Abgabe am 30.05.-01.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Taylorapproximation für lineare Funktionen) (5 Punkte)

Es sei $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, d.h. $\ell(x,y) = (c_1 \ \ c_2)\binom{x}{y}$.
Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von ℓ im Punkt (a,b) an.
Vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich und begründen Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Lösung: Das Taylorpolynom zweiten Grades von ℓ im Punkt (a,b) hat die Form

$$\ell(a,b) + \ell'(a,b)\binom{x-a}{y-b} + \frac{1}{2}(x-a, y-b)^T H_\ell(a,b)\binom{x-a}{y-b}$$

Da ℓ eine lineare Abbildung ist, ist $\ell'(a,b) = (c_1, c_2)$ und $H_\ell(a,b) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Damit erhält man als vereinfachte Form

$$\ell(a,b) + (c_1, c_2)\binom{x-a}{y-b} = c_1 a + c_2 b + c_1(x-a) + c_2(y-b) = c_1 x + c_2 y = \ell(x,y)$$

Da ℓ bereits eine lineare Abbildung ist, d.h. ihr Graph ist eine Ebene, ist das Taylorpolynom als quadratische Approximation wieder die Abbildung selbst bzw. als Graph dieselbe Ebene.
Alternativ genügt es auch festzustellen, dass ℓ bereits eine lineare Abbildung ist, d.h. dass das Taylorpolynom als quadratische Approximation wieder die Abbildung ℓ selbst sein muss und dass der Graph von ℓ damit natürlich auch der Graph des Taylorpolynoms ist.

Aufgabe H2 (Extremwertberechnung) (8 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremstellen und die Sattelpunkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3.$$

Hinweis: Um globale bzw. absolute Extremstellen herauszufinden, ist das Verhalten der Funktion am Rand des Definitionsbereiches, an Definitionslücken (insofern vorhanden) und im Unendlichen zu untersuchen.

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3y^2 + 3x^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y^3 - 6xy = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0 \text{ oder } 4y^2 - 6x = 0.$$

$\Longrightarrow$ kritische Punkte: $(0,0)$, $(\frac{3}{2},\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$.

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 12y^2-6x \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(H_f) = 72xy^2 - 36x^2 + 36y^2$$

Untersuchung bei $(0,0) : \det(H_f)(0,0) = 0 \implies$ hinreichendes Kriterium nicht anwendbar.
$f(x,0) = x^3 \quad \Longrightarrow$ f hat bei $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

Untersuchung bei $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$: $\det(H_f)(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = 243 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = 9 > 0$
$\Longrightarrow$ f hat bei $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ein lokales Minimum.

Untersuchung bei $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$: $\det(H_f)(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = 243 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = 9 > 0$
$\Longrightarrow$ f hat bei $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ein lokales Minimum.

Die Funktion f hat kein globales Maximum, da $f(0,y) = y^4$ beliebig große Werte annimmt.
Die Funktion f hat auch kein globales Minimum, da $f(x,0) = x^3$ beliebig kleine Werte annimmt.

Aufgabe H3 (Taylorformel) (7 Punkte)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x - \cos(xy),\ \text{im Punkt } (1,\pi).$$

Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion f im Punkt $(1,\pi)$ an.

Lösung: Für die Ableitung von f berechnet man

$$f'(x,y) = (1 + y\sin xy, x\sin xy),\ \text{d.h. } f'(1,\pi) = (1,0)$$

Der Hessematrix ist

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos xy & \sin xy + xy\cos xy \\ \sin xy + xy\cos xy & x^2\cos xy \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h. } Hf(1,\pi) = \begin{pmatrix} -\pi^2 & -\pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix}$$

Und damit:

$$\begin{aligned} T_2 f(x,y) &= 2 + (1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-\pi \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-\pi) \cdot Hf(1,\pi) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-\pi \end{pmatrix} \\ &= 2 + (x-1) - \pi(x-1)(y-\pi) - \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-\pi)^2 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1,\pi)$ lautet

$$f(1,\pi) + (\operatorname{grad} f)(1,\pi) \cdot ((x,y) - (1,\pi)) = 2 + (1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-\pi \end{pmatrix} = x + 1.$$