Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
16.05.-18.05.11

5. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Partielle Ableitungen)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy^2}$.

(a) Überzeugen Sie sich, dass f unendlich oft stetig differenzierbar ist. Was bedeutet das für die Reihenfolge der partiellen Ableitungen? Wieviele verschiedene partielle Ableitungen k-ter Ordnung gibt es dann?

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von f.

Lösung:

(a) Die Funktion f ist unendlich oft stetig differenzierbar, weil sie eine elementare Funktion ist. Deshalb macht die Reihenfolge der partiellen Ableitungen kein Unterschied (z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$). In einer partiellen Ableitung k-ter Ordnung wird f n-mal nach x und $(k-n)$-mal nach y ableitet, wo $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$, also gibt es $k+1$ Möglichkeiten.

Bemerkung: Wenn man die Reihenfolge der Ableitungen berücksichtigt, dann haben wir zwei (= die Anzahl der Variablen) Möglichkeiten für jede von k Ableitungen und so insgesamt 2^k Möglichkeiten.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2} y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy^2} 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{xy^2} y^4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy^2}(2xy^3 + 2y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{xy^2}(4x^2y^2 + 2x)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^{xy^2} y^6 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = e^{xy^2}(2xy^5 + 4y^3)$$

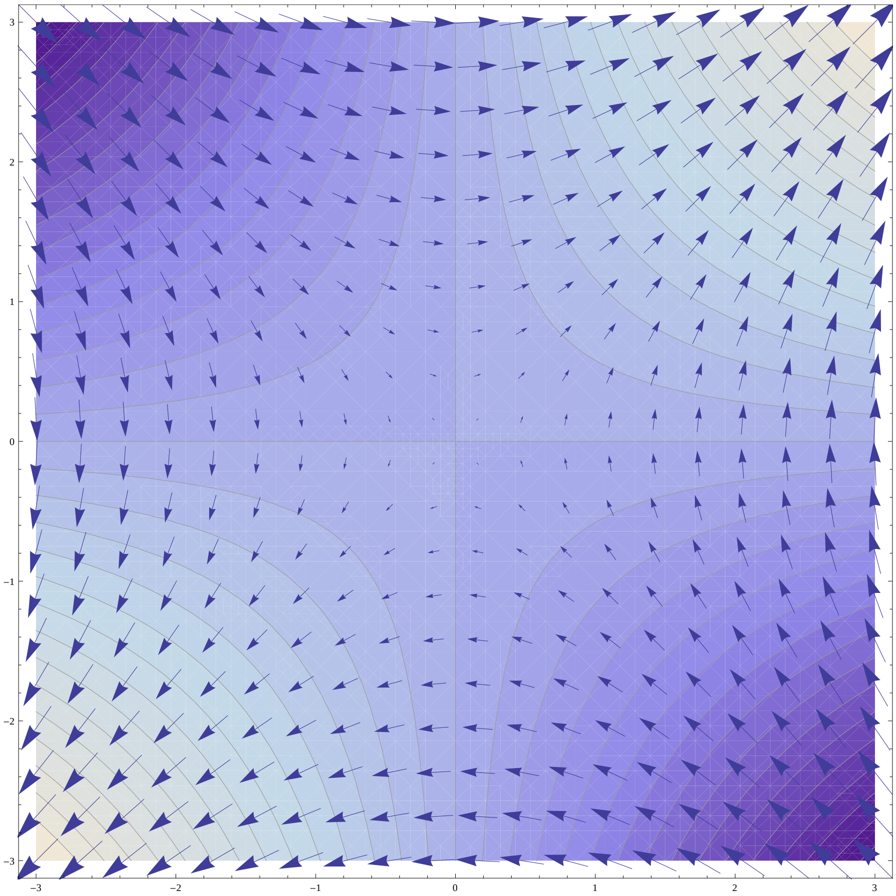
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = e^{xy^2}(4x^2y^4 + 8xy^2 + 2) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = e^{xy^2}(8x^3y^3 + 2x^2y + 8x^2y)$$

Aufgabe G2 (Gradientenvektorfeld)

Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$, in jedem Punkt der Ebene und skizzieren Sie das Gradientenvektorfeld. Skizzieren Sie auch die Niveaulinien von f; was sehen Sie?

Lösung:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}^T = [y \quad x]^T$$



Das Gradientenvektorfeld ist orthogonal zu den Niveaulinien.

Aufgabe G3 (Kettenregel und Richtungsableitung)

Wir setzen

- $X(t) = \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t\big)$,
- $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$ und
- $g = f \circ X$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von X und die totale Ableitung (den Gradienten) von f.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von g auf zwei Arten: direkt (schreiben Sie den Funktionsterm von g auf, dann leiten Sie ihn ab) und mit der Kettenregel.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $(0, 2\pi, 1)$ im Punkt $(1, 0, 1)$. Vergleichen Sie sie mit der Ableitung von g im Punkt $t = 1$. Erklären Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a) $\dot{X}(t) = [-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1]^T$, $\nabla f = \left[\frac{-2xz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2yz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2z}{x^2+y^2}\right]^T$

Bemerkung: Wenn wir sehr präzise sind, ist die totale Ableitung eine Zeile, während der Gradient eine Spalte ist.

(b)

$$g(t) = f\big(X(t)\big) = f\big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t\big) = \frac{t^2}{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)} = t^2,$$

sodass $\dot{g}(t) = 2t$.
Kettenregel: $\dot{g}(t) = (\nabla f)\big(X(t)\big) \cdot \dot{X}(t) =$

$$= \left[\frac{-2\cos(2\pi t)t^2}{(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t))^2}, \frac{-2\sin(2\pi t)t^2}{(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t))^2}, \frac{2t}{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)}\right] \begin{bmatrix} -2\pi\sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4\pi\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)t^2}{1^2} + \frac{-4\pi\cos(2\pi t)\sin(2\pi t)t^2}{1^2} + \frac{2t}{1} = 2t$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,0,1) = (\nabla f)(1,0,1) \cdot \mathbf{v} = [-2,0,2][0,2\pi,1]^T = 2$$

$$\dot{g}(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Beide sind gleich, weil $X(1) = (1,0,1)$, und in diesem Punkt ist der Tangentialvektor an die Kurve $\dot{X}(1) = (0, 2\pi, 1)$.

Hausübung

– Abgabe am 23.05.-25.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Partielle Ableitungen) (8 Punkte)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung und den Gradienten der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$.

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2+y^2+z^2)2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2+y^2+z^2)2y \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos(x^2+y^2+z^2)2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x^2+y^2+z^2)4x^2 + \cos(x^2+y^2+z^2)2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x^2+y^2+z^2)4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\sin(x^2+y^2+z^2)4xz \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x^2+y^2+z^2)4y^2 + \cos(x^2+y^2+z^2)2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\sin(x^2+y^2+z^2)4yz \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\sin(x^2+y^2+z^2)4z^2 + \cos(x^2+y^2+z^2)2$$

$$\nabla f = [\cos(x^2+y^2+z^2)2x \quad \cos(x^2+y^2+z^2)2y \quad \cos(x^2+y^2+z^2)2z]^T$$

Aufgabe H2 (Kettenregel) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$.

Hinweis: Kettenregel für die Funktionen $g(x,y) = x^y$ und $h(x) = (x,x)$.

Lösung:

$$\nabla g = [yx^{y-1} \quad x^y \ln(x)]^T, \qquad h'(x) = [1 \quad 1]^T$$

$$f'(x) = (\nabla g)(h(x)) \cdot h'(x) = [xx^{x-1} \quad x^x \ln(x)][1 \quad 1]^T = x^x(1+\ln(x))$$

Aufgabe H3 (Gradientenvektorfeld und Richtungsableitung) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie das Gradientenvektorfeld $(\nabla f)(x,y)$ von f.

(b) Es sei $\mathbf{v} = (1,1)$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y)$ (die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v}$) auf zwei Arten: direkt via Definition

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y)+t\mathbf{v}) - f(x,y)}{t}$$

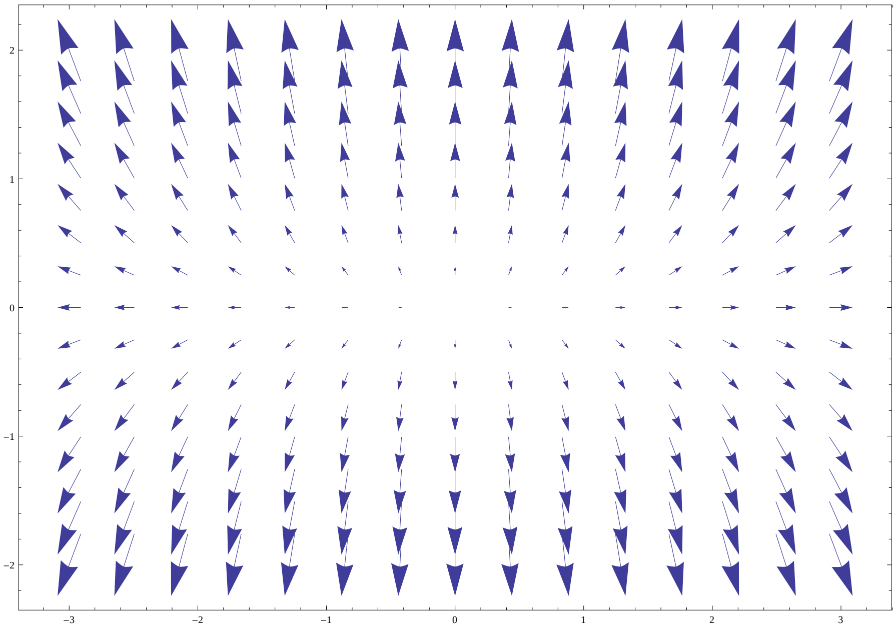
und mithilfe der Formel $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x,y) = (\nabla f)(x,y)\mathbf{v}$.

Lösung:

(a)

$$\nabla f = [2x \quad 8y]^T$$

Skizze:



(b)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f((x,y)+t\mathbf{v})-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y+t)-f(x,y)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{x^2+2xt+t^2+4y^2+8yt+4t^2-x^2-4y^2}{t}=\lim_{t\to 0}(2x+8y+5t)=2x+8y$$

$$(\nabla f)(x,y)\cdot\mathbf{v}=[2x\quad 8y][1\quad 1]^T=2x+8y$$