Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
02.05.-04.05.11

3. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Erinnerung: Wie stets müssen alle Aussagen begründet werden.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit in höherdimensionalen euklidischen Räumen)
Sie haben die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vorliegen:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0, \\ \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Sind die beiden Komponentenfunktionen

$$k_1(x) = f(x,0), \qquad k_2(y) = f(0,y)$$

stetig?

(b) Ist f eine stetige Funktion? Falls ja: weisen Sie nach, dass dem so ist. Anderenfalls geben Sie explizit eine Folge $a_n = (x_n, y_n)$ an, sodass $f(\lim_{n\to\infty} a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

Lösung:

(a) Beide Komponentenfunktionen sind Nullfunktionen und daher stetig.

(b) Die Funktion f ist nicht stetig (im Koordinatenursprung); zum Beispiel

$$f\big(\lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})\big) = f(0,0) = 0,$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\big) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Aufgabe G2 (Konstruktion eines Kreises)
Parametrisieren Sie die Kreisbahn als eine Funktion $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die durch die Punkte $(0,0)$, $(3,-1)$, $(8,4)$ geht.

Lösung: Zuerst müssen wir den Mittelpunkt und den Radius der Kreisbahn finden. Wenn wir die Punkte in der allgemeinen Gleichung einer Kreisbahn $(x-p)^2 + (y-q) = r^2$ einsetzen, erhalten wir die Gleichungen

$$p^2 + q^2 = r^2,$$
$$(3-p)^2 + (-1-q)^2 = r^2,$$
$$(8-p)^2 + (4-q)^2 = r^2,$$

von denen die einzige Lösung $p = 3$, $q = 4$ und (weil $r \geq 0$) $r = 5$ ist. Eine Parametrisierung der Kreisbahn $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ ist $X(t) = [3 + 5\cos(t), 4 + 5\sin(t)]^T$.

Aufgabe G3 (Eigenschaften von Kurven)
Es sei die Kurve $X\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ als $X(t) = [t^3, t^4, \cos(t^2)]^T$ gegeben.

(a) Ist diese Kurve stetig, differenzierbar, regulär?

(b) Finden Sie eine reguläre Reparametrisierung der Bahn von X.

Lösung:

(a) Alle Komponentenfunktionen sind stetig und differenzierbar, deshalb gilt das auch für die Kurve. Die Ableitung
$$\dot{X}(t) = [3t^2, 4t^3, -2t\sin(t)]^T$$
hat jedoch einen Nullpunkt ($t = 0$), sodass diese Parametrisierung nicht regulär ist.

(b) Wir erhalten eine neue Parametrisierung durch die Komposition der alten mit einer Bijektion des Intervalls, auf dem die Kurve definiert ist. In diesem Fall können wir für die Bijektion von dem Intervall $[-1,1]$ die Funktion $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ nehmen, weil die Ableitung der Parametrisierung $Y(t) = [t, t^{\frac{4}{3}}, \cos(t^{\frac{2}{3}})]^T$ keine Nullpunkte hat.

Bemerkung: Um zu sehen, dass die Funktion $\cos(t^{\frac{2}{3}})$ auch in 0 ableitbar ist, kann man cos in die Taylorreihe entwickeln:
$$\cos(t^{\frac{2}{3}})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{\frac{4n}{3}}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n}{3(2n)!} t^{\frac{4n}{3}-1}.$$

Hausübung

– Abgabe am 09.05.-11.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Konvergenz in höherdimensionalen euklidischen Räumen) (3 Punkte)
Finden Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\big(2^{-n}, \arctan(n), \cos(\frac{1}{n})\big)$ in $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Den Grenzwert einer Folge im höherdimensionalen euklidischen Raum berechnet man komponentenweise.

$$\lim_{n\to\infty}\big(2^{-n}, \arctan(n), \cos(\tfrac{1}{n})\big) = \big(0, \tfrac{\pi}{2}, 1\big)$$

Aufgabe H2 (Stetigkeit in höherdimensionalen euklidischen Räumen) (10 Punkte)
Sei $f(x,y) = \arctan\big(e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\big)$.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.

(b) Finden Sie eine stetige Erweiterung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f.

(c) Zeigen Sie, dass die Kurve $X\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $X(t) = g(t,0)$, differenzierbar, aber nicht regulär ist.
Hinweis: Differenzenquotient, l'Hospitalsche Regel

Lösung:

(a) Das einzige Problem ist durch Null zu teilen, also muß $x^2 + y^2 \neq 0$ gelten und so $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Die Funktion f ist schon stetig und definiert überall außer im Koordinatenursprung, also müssen wir nur $g(0,0)$ bestimmen. Damit g stetig wird, muss dieser Wert der Grenzwert von f sein.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\big(e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\big) = \lim_{r\to 0} \arctan\big(e^{\frac{1}{r^2}}\big) = \lim_{s\to+\infty} \arctan(e^s) = \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$$

Also

$$g(x,y) = \begin{cases} \arctan\big(e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\big) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

(c) Wir haben

$$X(t) = \begin{cases} \arctan\big(e^{\frac{1}{t^2}}\big) & t \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & t = 0. \end{cases}$$

Es ist klar, dass X differenzierbar für $t \neq 0$ ist (und dort ist die Ableitung $\dot{X}(t) = \frac{-2t^{-3}e^{\frac{1}{t^2}}}{1+e^{\frac{2}{t^2}}}$ nirgends null). Für $t = 0$ können wir die Ableitung nach Definition berechnen (für die zweite Gleichheit nutzen wir die l'Hospitalsche Regel):

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(0+h) - X(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan\big(e^{\frac{1}{h^2}}\big) - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2h^{-3}e^{\frac{1}{h^2}}}{1+e^{\frac{2}{h^2}}}}{1} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{h^3\big(e^{-\frac{1}{h^2}} + e^{\frac{1}{h^2}}\big)} = 0,$$

weil $e^{-\frac{1}{h^2}} \longrightarrow 0$ und weil $e^{\frac{1}{h^2}}$ schneller ins Unendliche als h^3 zur Null geht. Also ist X differenzierbar, aber immer noch nicht regulär, weil $\dot{X}(0) = 0$.

Aufgabe H3 (Kurven) (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $X\colon [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^3$, $X(t) = [\cos(t), \sin(t), \tan(t)]^T$, eine Parametrisierung von der Schraubenlinie, gegeben durch

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = xz, \quad |z| \leq 1, \quad x > 0,$$

ist.

(b) Beweisen Sie, dass X regulär ist.

Lösung:

(a) Das Bild von X ist in der Schraubenlinie enthalten:
- $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$,
- $\sin(t) = \cos(t)\tan(t)$,
- $-1 \leq \tan(t) \leq 1$ für $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$,
- $\cos(t) > 0$ für $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Umgekehrt, für jeden Punkt (x, y, z) in der Schraubenlinie gibt es ein $t = \arctan(z) = \arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, sodass $X(t) = (x, y, z)$.

Eine längere Lösung ist, die Parametrisierung aus den (Un)Gleichungen zu berechnen. Weil $x^2+y^2 = 1$ gilt, kann man $x = \cos(\varphi)$, $y = \sin(\varphi)$ schreiben. Dann ist $z = \frac{y}{x} = \tan(\varphi)$ und weil $|z| \leq 1$, sehen wir, dass $\varphi \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$ für einige $k \in \mathbb{Z}$ ist. Weil alle diese Funktionen 2π-periodisch sind, können wir uns auf $k \in \{0, 1\}$ beschränken. Aber $x = \cos(\varphi) < 0$ für $\varphi \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, sodass nur $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ bleibt. Also ist $X\colon [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^3$,

$$X(t) = [\cos(t), \sin(t), \tan(t)]^T$$

tatsächlich eine mögliche Parametrisierung der Kurve.

(b) Man sieht, dass sie auch regulär ist, weil

$$\dot{X}(t) = \big[-\sin(t), \cos(t), \frac{1}{\cos^2(t)} \big]^T$$

keine Nullpunkte hat.