Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
26.04.-27.04.11

2. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Erinnerung: Wie stets müssen alle Aussagen begründet werden.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Grenzwerte und Häufungspunkte)
Finden Sie alle Häufungspunkte und Grenzwerte der folgende Folgen.

(a) $a_n = \cos(n\pi) \cdot \frac{1}{n}$

(b) $b_n = \cos(n\pi) \cdot (1 - \frac{1}{n})$

Lösung: Man sieht, dass $\cos(n\pi) = 1$, wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, und $\cos(n\pi) = -1$ andernfalls. Weil $|a_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, konvergiert auch a_n gegen 0. Somit ist 0 auch der einzige Häufungspunkt der Folge.
Im Fall der zweiten Folge gilt $|b_n| = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1$. Also konvergieren die geraden Glieder der Folge gegen 1 und die ungerade gegen -1. Somit hat die Folge die beiden Häufungspunkte 1 und -1 (und deshalb keinen Grenzwert).

Aufgabe G2 (Trigonometrische Identitäten)
Beweisen Sie die Gleichungen

(a) $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

(b) $\tan(\frac{x}{2}) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wo die Ausdrücke definiert sind.

Lösung:

(a) $\tan(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \dfrac{2\ \sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \dfrac{2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

(b) $\dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \dfrac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})} = \dfrac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})} = \tan(\frac{x}{2})$

Aufgabe G3 (Fourier-Entwicklung)
Es sei die Funktion $f\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ als $f(x) = x$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

(b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei die Fourierreihe mit diesen Koeffizienten. Schreiben Sie sie auf. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = g(x)$?

(c) Berechnen Sie die Werte $g(2\pi)$ und $g(10)$.

(d) Schreiben Sie auch die komplexe Version dieser Fourierreihe auf.

Lösung:

(a)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(nx)dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\ x\ \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{2\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Wir haben die Formel für die partielle Integration $\int_a^b udv = uv\big|_a^b - \int_a^b vdu$ verwendet, wobei $u = x$ und $dv = \cos(nx)dx$ (sodass $du = dx$, $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$).
Diese Berechnung funktioniert nur für $n \geq 1$, weil wir teilen durch n, so dass wir separat den Fall $n = 0$ berechnen müssen.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx = \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Ähnlich:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\ x\ \frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^{2\pi}}_{-\frac{2}{n}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\cos(nx)dx = -\frac{2}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\sin(nx)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

(b)

$$g(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx)$$

Sei $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Erweiterung der Funktion f. Weil $\tilde{f}$ stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert g überall auf $\mathbb{R}$ und wir haben $f(x) = g(x)$ mindestens, wo f definiert is und wo $\tilde{f}$ stetig ist, das heißt für $x \in]0, 2\pi[$. Aber $f(0) \neq g(0)$, weil $f(0) = 0$ und

$$g(0) = \frac{\lim_{x\downarrow 0}\tilde{f}(x) + \lim_{x\uparrow 0}\tilde{f}(x)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi.$$

Bemerkung: Man konnte ahnen, dass $a_n = 0$ für $n \geq 1$ ist, weil $\tilde{f} - \frac{a_0}{2}$ eine ungerade Funktion ist.

(c)

$$g(2\pi) = \frac{\lim_{x\downarrow 2\pi}\tilde{f}(x) + \lim_{x\uparrow 2\pi}\tilde{f}(x)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi$$

Weil $\tilde{f}$ in 10 stetig ist, ist der zweite Fall einfacher:

$$g(10) = \tilde{f}(10) = \tilde{f}(10 - 2\pi) = f(10 - 2\pi) = 10 - 2\pi$$

weil $10 - 2\pi \in [0, 2\pi[$.

(d) Für $n \neq 0$ haben wir

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}x\frac{i}{n}e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{i}{n}e^{-inx}dx = \frac{i}{n} + \frac{1}{2\pi n^2}e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} = \frac{i}{n}$$

(wo $u = x$, $dv = e^{-inx}dx$, $du = dx$, $v = \frac{1}{-in}e^{-inx} = \frac{i}{n}e^{-inx}$). Für $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x = \pi.$$

Die komplexe Fourierentwicklung ist dann $\pi + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{i}{n}e^{-inx}$.

Dasselbe Resultat kriegen wir auch mit der Formel

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{für } n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{für } n > 0, \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Hausübung

– Abgabe am 02.05.-04.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Wiederholung: Trigonometrische Identitäten) (6 Punkte)

Beweisen Sie mit der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$:

(a) $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

(b) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

(c) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

(d) $\big(r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot \big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)$

Lösung:

(a)

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)+\cos(x)-i\sin(x)}{2} = \cos(x)$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)-\cos(x)+i\sin(x)}{2i} = \sin(x)$$

Hier beachten Sie, dass $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x)$, weil cos eine gerade und sin eine ungerade Funktion ist. Wir könnten auch

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

schreiben und dieses System auf $\cos(x)$ und $\sin(x)$ lösen.

(b)

$$\cos^2(x)+\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}-e^{2ix}+2-e^{-2ix}}{4} = 1$$

$$\cos^2(x)-\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}+e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{4} = \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} = \cos(2x)$$

(c)

$$\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{ix}e^{iy}+e^{ix}e^{-iy}-e^{-ix}e^{iy}-e^{-ix}e^{-iy}+e^{ix}e^{iy}-e^{ix}e^{-iy}+e^{-ix}e^{iy}-e^{-ix}e^{-iy}}{4i} =$$

$$= \frac{e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}}{2i} = \sin(x+y)$$

(d)

$$\big(r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big)^n = \big(r\cdot e^{ix}\big)^n = r^n\cdot e^{inx} = r^n\cdot\big(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\big)$$

Aufgabe H2 (Fourier-Entwicklung) (11 Punkte)

Stellen Sie die reellen und komplexen Fourierreihen der folgenden Funktionen dar. Wo sind die reellen Fourierreihen stetig und wo differenzierbar?

(a) $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + 1$

(b) $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(\frac{x}{2})$

(c) $h\colon (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $h(x) = e^x$

Lösung:

(a) Im ersten Fall stimmt die Funktion mit ihrer Fourierentwicklung überein, also ist sie stetig differenzierbar.

Komplexe Fourierentwicklung: $f(x) = \frac{1}{2}e^{-ix} + 1 + \frac{1}{2}e^{ix}$.

(b)

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{x}{2})\cos(nx)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\big((\tfrac{1}{2}-n)x\big)dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\big((\tfrac{1}{2}+n)x\big)dx = \\
&= -\frac{1}{2\pi(\frac{1}{2}-n)}\cos\big((\tfrac{1}{2}-n)x\big)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi(\frac{1}{2}+n)}\cos\big((\tfrac{1}{2}+n)x\big)\Big|_0^{2\pi} = \\
&= \frac{2}{2\pi(\frac{1}{2}-n)} + \frac{2}{2\pi(\frac{1}{2}+n)} = \frac{1}{\pi(\frac{1}{2}-n)(\frac{1}{2}+n)}
\end{aligned}
$$

Weil die 2π-periodische Erweiterung der Funktion g gerade ist, ist $b_n = 0$. Daher

$$
c_n = \frac{a_{|n|}}{2} = \frac{1}{2\pi(\frac{1}{2}-|n|)(\frac{1}{2}+|n|)}.
$$

Die Fourierentwicklung ist stetig, aber in $2\pi n$ (für $n \in \mathbb{Z}$) nicht differenzierbar (weil die linksseitige und rechtsseitige Ableitung verschieden sind).

(c)

$$
c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi(1-in)}e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{2\pi(1-in)} = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi(1-in)}
$$

$$
a_n = c_{-n} + c_n = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} \qquad b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{i} = -\frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})n}{\pi(1+n^2)}
$$

Die Fourierentwicklung ist in den Punkten $\pi + 2\pi n$ (für $n \in \mathbb{Z}$) nicht stetig (und somit auch nicht differenzierbar).

Aufgabe H3 (Fourier-Entwicklung) (3 Punkte)

Bestimmen Sie (mit höchstens vier Zeilen Rechnung) die Fourierreihen der Funktionen

$$
f(x) = \cos^2(x), \qquad g(x) = \sin^2(x).
$$

Hinweis: **H1**(b)

Lösung: Lösen Sie das System

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\
\cos^2(x) - \sin^2(x) &= \cos(2x)
\end{aligned}
$$

um $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$, $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ zu erhalten. Das sind schon die Fourierentwicklungen.