Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
11.07.-13.07.11

13. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Taylor- und Fourier-Entwicklung)
Finden Sie die Taylor- und Fourier-Entwicklung der Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin(x)$.

Lösung: Taylorreihe: $f(x) = x\sin(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2}$.
Weil f eine gerade Funktion im symmetrischen Interval $[-\pi,\pi]$ ist, haben wir

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$$

und

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\sin(x)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\, \frac{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)}{2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \Big(x\sin\big((1+n)x\big) + x\sin\big((1-n)x\big)\Big) dx.$$

Sei $a \neq 0$; dann

$$\int_{0}^{\pi} x\sin(ax)dx = -\frac{1}{a}x\cos(ax)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{a}\int_{0}^{\pi} \cos(ax)dx = -\frac{\pi}{a}(-1)^a + \frac{1}{a^2}\sin(ax)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{a}(-1)^a.$$

Natürlich, wenn $a = 0$, dann $\int_0^{\pi} x\sin(ax)dx = 0$. Also

$$a_n = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{1+n}(-1)^{1+n} - \frac{\pi}{1-n}(-1)^{1-n}\Big) = \frac{(-1)^n}{1+n} + \frac{(-1)^n}{1-n} = \frac{2(-1)^n}{1-n^2}$$

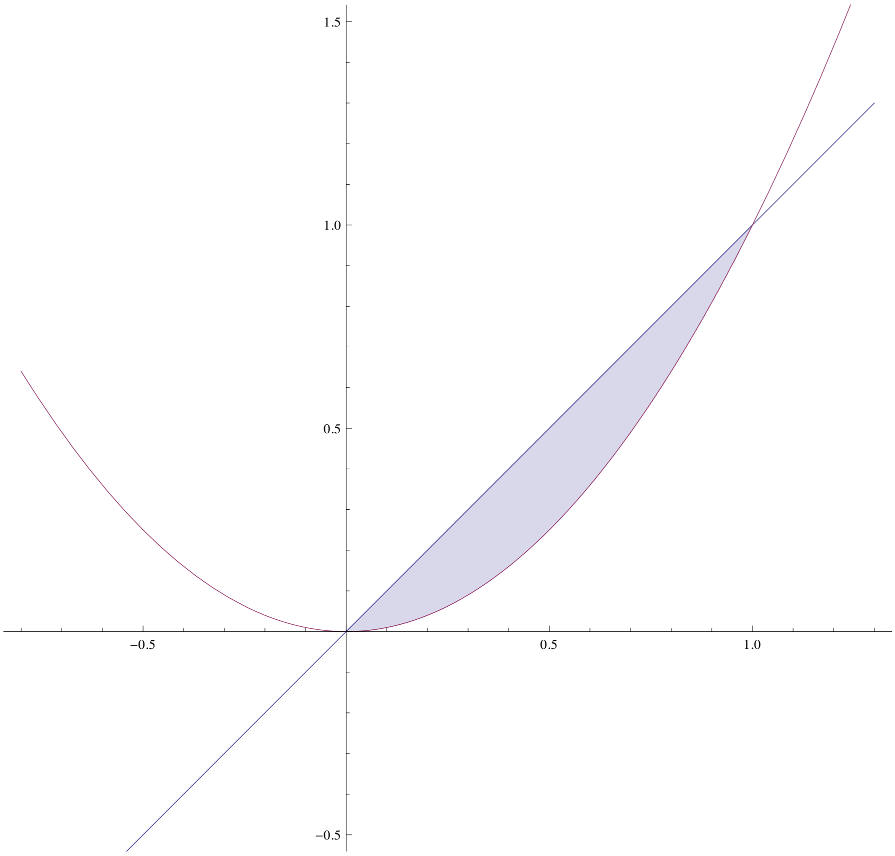
für $n \neq 1$ und $a_1 = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{\pi}{1+1}(-1)^{1+1} - 0\Big) = -\frac{1}{2}$. Die Fourier-Entwicklung ist dann

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1-n^2}\cos(nx).$$

Aufgabe G2 (Kurvenlänge und Fläche)

Berechnen Sie den Umfang und die Fläche der Figur zwischen der Gerade $y = x$ und der Parabel $y = x^2$.

Lösung:



Die Länge der gerade Kante ist $\sqrt{2}$ (beim Satz des Pythagoras). Eine Parametrisierung der gebogenen Kante ist $X\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $X(t) = (t, t^2)$; ihre Ableitung ist $\dot{X}(t) = (1, 2t)$ und dann ihre Länge ist

$$\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt = \int_0^{\operatorname{asinh}(2)} \sqrt{1+\sinh^2(u)}\frac{1}{2}\cosh(u)du = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{asinh}(2)} \cosh^2(u)du =$$

$$\boxed{t = \tfrac{1}{2}\sinh(u), \qquad dt = \tfrac{1}{2}\cosh(u)du}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{asinh}(2)} \frac{1+\cosh(2u)}{2}du = \Big[\frac{1}{4}u + \frac{\sinh(2u)}{8}\Big]_0^{\operatorname{asinh}(2)} = \frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{\sinh(2\operatorname{asinh}(2))}{8} =$$

$$= \frac{\operatorname{asinh}(2)}{4} + \frac{2\sinh(\operatorname{asinh}(2))\cosh(\operatorname{asinh}(2))}{8} = \frac{\operatorname{asinh}(2) + 2\sqrt{1+2^2}}{4} = \frac{\ln(2+\sqrt{5}) + 2\sqrt{5}}{4}.$$

Der ganze Umfang ist $\sqrt{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})+2\sqrt{5}}{4}$.

Die Fläche ist

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Aufgabe G3 (Krümmung und Extremstellen)

Gegeben sei die Kurve $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$X(t) = \Big(t - \sin(t), 1 - \cos(t), 4 \sin\big(\frac{t}{2}\big)\Big).$$

Finden Sie die Punkte, wo die Krümmung von X minimal und maximal ist.

Lösung:

$$\dot{X}(t) = \Big(1 - \cos(t), \sin(t), 2\cos\big(\frac{t}{2}\big)\Big)$$

$$\|\dot{X}(t)\| = \sqrt{\big(1-\cos(t)\big)^2 + \sin^2(t) + 4\cos^2\big(\frac{t}{2}\big)} = \sqrt{2 - 2\cos(t) + 2\big(1+\cos(t)\big)} = 2$$

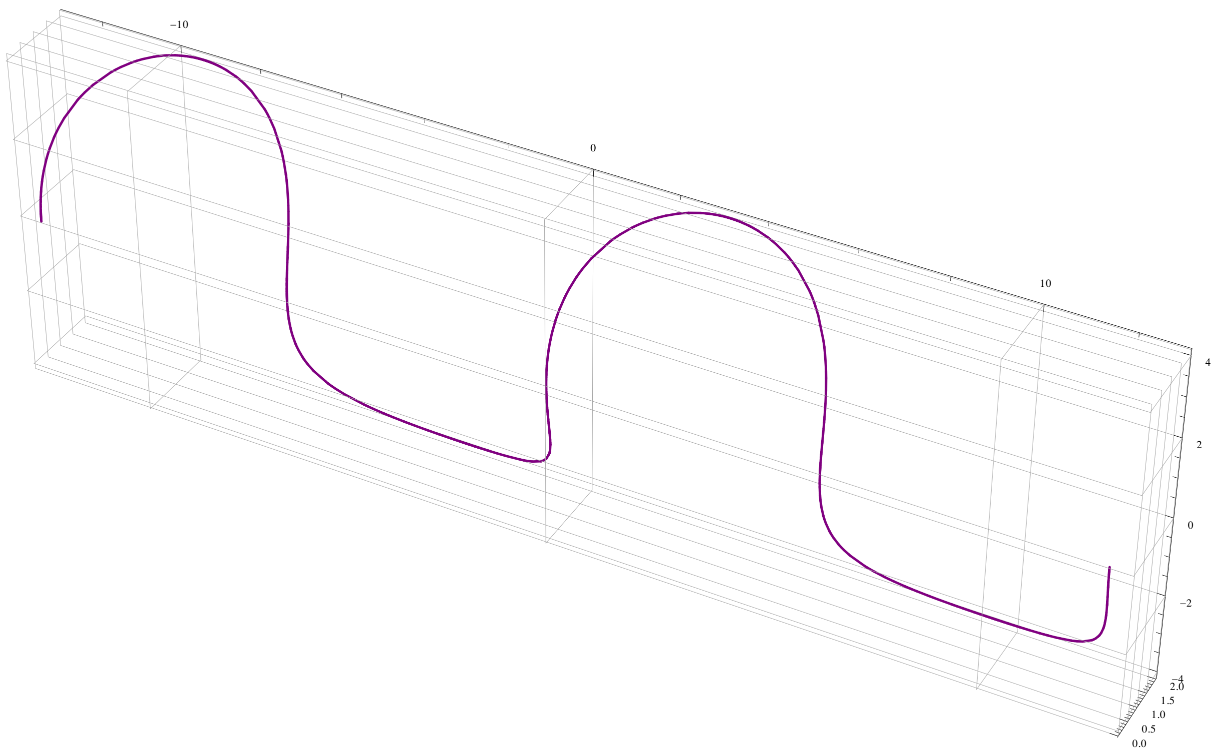
$$T(t) = \frac{\dot{X}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(t), \sin(t), 2\cos\big(\frac{t}{2}\big)\Big)$$

$$\dot{T}(t) = \frac{1}{2}\Big(\sin(t), \cos(t), -\sin\big(\frac{t}{2}\big)\Big)$$

$$\|\dot{T}(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)\big(\frac{t}{2}\big)} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1-\cos(t)}{2}} = \frac{\sqrt{3-\cos(t)}}{2\sqrt{2}}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{\|\dot{X}(t)\|} = \frac{\sqrt{3-\cos(t)}}{4\sqrt{2}}$$

Die Extremstellen von κ sind dieselben, wie für $3 - \cos(t)$, d.h. wir haben die Maxima bei $t = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, und die Minima bei $t = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.



Aufgabe G4 (Niveaulinien, Gradientenvektorfeld, implizite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{16} + \frac{(x-y)^2}{4}.$$

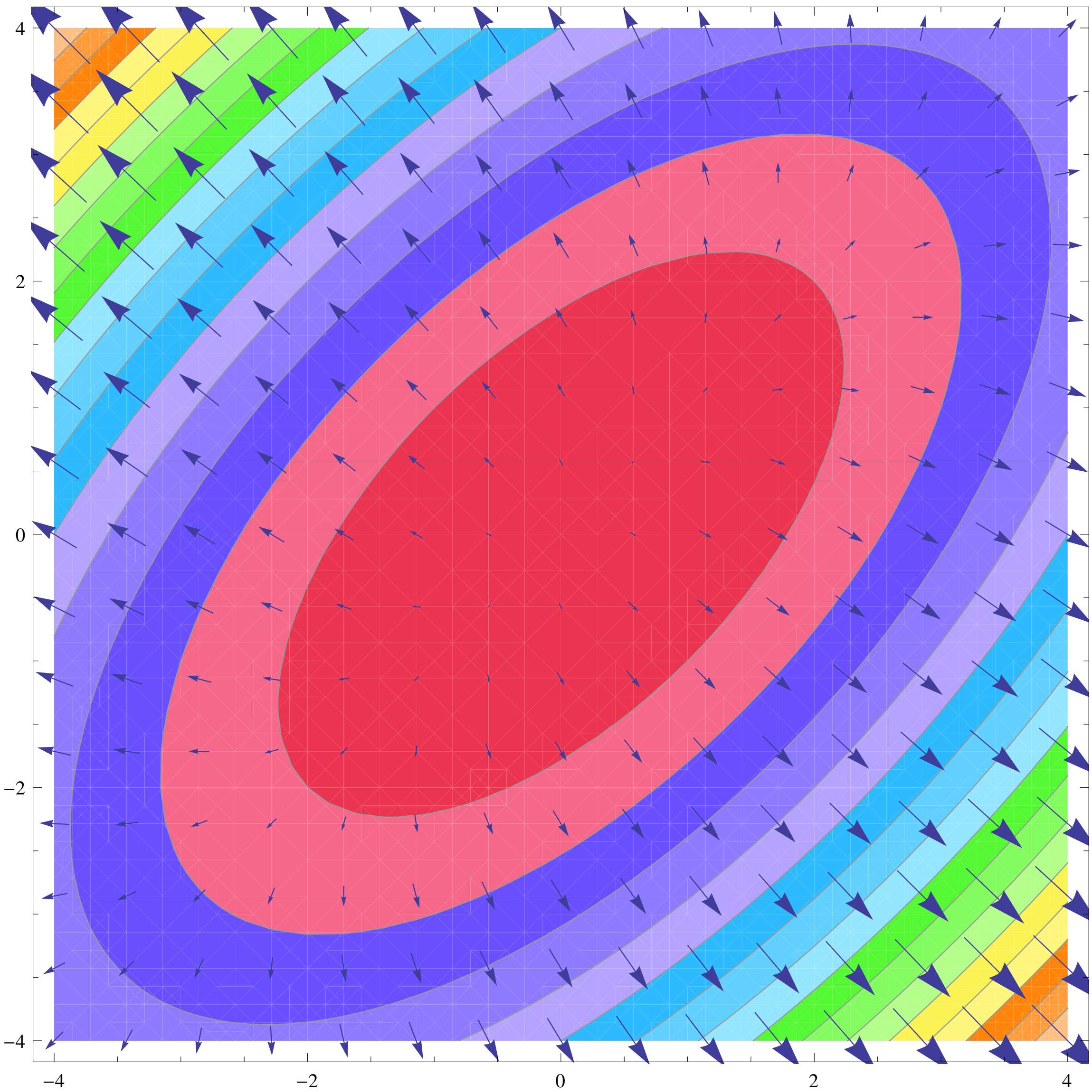
(a) Zeichnen Sie die Niveaulinien und das Gradientenvektorfeld von f.

(b) Welche Punkte auf der 1-Niveaulinie haben eine Umgebung, wo die Gleichung $f(x,y) = 1$ eine Funktion $y = g(x)$ bestimmt? Finden Sie diese Punkte zuerst auf dem Bild, dann berechnen Sie sie mithilfe des Satzes über impliziten Funktion.

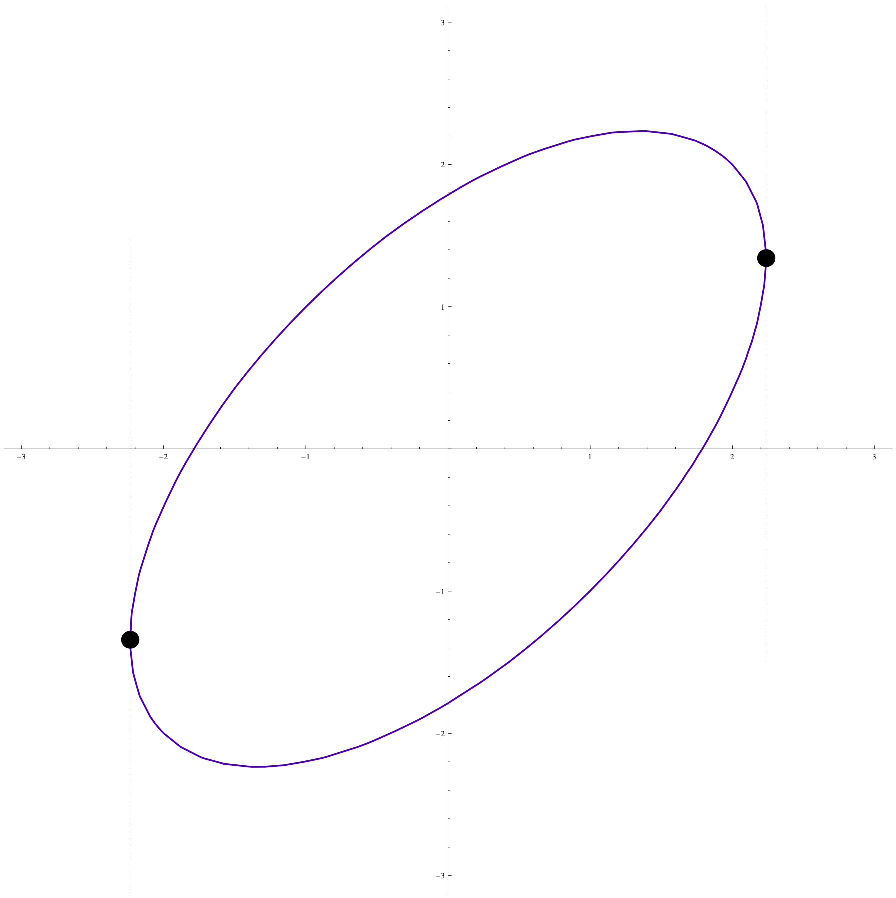
Lösung:

(a)

$$(\nabla f)(x,y) = \left(\frac{5x-3y}{8},\ \frac{5y-3x}{8}\right)$$



(b) Die Antwort: alle Punkte auf der 1-Niveaulinie, wo die Tangente nicht senkrecht ist,



d.h., wo $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Die kritische Punkte sind dann, wo die Gleichungen

$$\frac{(x+y)^2}{16} + \frac{(x-y)^2}{4} = 1, \qquad \frac{5y-3x}{8} = 0$$

gelten. Die zweite sagt uns $y = \frac{3}{5}x$ und das können wir in die erste Gleichung einfügen.

$$\frac{(\frac{8}{5}x)^2}{16} + \frac{(\frac{2}{5}x)^2}{4} = 1$$
$$4x^2 + x^2 = 25$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{5}$$

Wir erhalten die zwei Punkte $(\sqrt{5}, \frac{3}{5}\sqrt{5})$ und $(-\sqrt{5}, -\frac{3}{5}\sqrt{5})$.

Aufgabe G5 (Riemann-Integrale)

Berechnen Sie das Volumen und den Schwerpunkt der Schnittmenge des Balles $x^2+y^2+z^2 \le 1$ und des Kegels $x^2+y^2 \le z^2$, $z \ge 0$.

Lösung: Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2+y^2 \le z^2, z \ge 0\}$. Das Volumen ist dann $V = \int_K d(x,y,z)$. Wir berechnen es auf zwei Arten.

In Zylinderkoordinaten:

$$V = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \big(\int_r^{\sqrt{1-r^2}} r dz \big) dr \Big) d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \big(r\sqrt{1-r^2} - r^2 \big) dr \Big) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3 \Big)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big) d\varphi = \frac{2\pi}{3}\big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$$

In Kugelkoordinaten:

$$V = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos(\vartheta) d\vartheta \big) d\varphi \Big) dr = \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^1 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \sin(\vartheta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3}\big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$$

Die erste zwei Koordinaten des Schwerpunktes sind $x_S = y_S = 0$ wegen Rotationssymmetrie. Der dritte ist $z_S = \frac{1}{V}\int_K z d(x,y,z)$. Wir haben $\frac{1}{V} = \frac{3}{2\pi}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{2\pi}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}{\pi}$.

In Zylinderkoordinaten:

$$z_S = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \big(\int_r^{\sqrt{1-r^2}} z r dz \big) dr \Big) d\varphi = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \big(\frac{1}{2} z^2 r \Big|_{z=r}^{z=\sqrt{1-r^2}} \big) dr \Big) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \big(\frac{1}{2} r - r^3 \big) dr \Big) d\varphi = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{r^2 - r^4}{4} \Big)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\varphi = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} d\varphi = \frac{1}{V}\frac{\pi}{8} = \frac{3(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}{8}$$

In Kugelkoordinaten:

$$V = \frac{1}{V} \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r \sin(\vartheta) r^2 \cos(\vartheta) d\vartheta \big) d\varphi \Big) dr = \frac{1}{V} \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\sin^2(\vartheta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{V}\frac{\pi}{8} = \frac{3(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}{8}$$

Der Schwerpunkt ist also $\big(0, 0, \frac{3(1+\frac{1}{\sqrt{2}})}{8}\big)$.