Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
04.07.-06.07.11

12. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Substitution)

Berechnen Sie mittels der 2-dimensionalen Transformationsformel die Fläche der Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Wie sieht das Integral $\iint_E dx\,dy$ in kartesischen Koordinaten aus?

Lösung: Eine mögliche Transformation ist

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} au \\ bv \end{pmatrix}, \text{Jacobimatrix: } J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, |detJ| = ab,$$

wobei u und v Koordinaten sind, die den Einheitskreis beschreiben. Damit kann das Integral über die Ellipse transformiert werden:

$$F_{Ellipse} = \int\int_{\text{Ellipse}} dx\ dy = \int\int_{\text{Einheitskreis}} ab\ du\ dv = ab\pi.$$

Ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ liegt genau dann in E wenn die Ungleichungen

$$-a \leq x \leq a \qquad \text{und} \qquad -b\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2} \leq y \leq b\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2}$$

gelten. Also ist mit $\vartheta(x) = b\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2}$

$$\iint_E dx\,dy = \int_{-a}^{a} \int_{-\vartheta(x)}^{\vartheta(x)} dy\,dx.$$

Aufgabe G2 (Polarkoordinaten)

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_G (x^2+y^2)\,d(x,y)$$

für den Integrationsbereich

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1 \text{ oder } |y| \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 2 \right\}.$$

Skizzieren Sie dazu zuerst den Integrationsbereich G. Verwenden Sie auch Polarkoordinaten.

Lösung: Die Menge G ist ein Kreis G_1 mit Radius $\sqrt{2}$ aus dem das offene Quadrat $G_2 =]-1,1[^2$ entfernt wurde. Also gilt

$$\int_G (x^2+y^2)\,d(x,y) = \int_{G_1} (x^2+y^2)\,d(x,y) - \int_{G_2} (x^2+y^2)\,d(x,y).$$

Für das zweite Integral erhält man

$$\begin{aligned}\int_{G_2} (x^2+y^2)\,d(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2+y^2\,dx\,dy = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y^2\,dx\,dy = 4\int_{-1}^{1} y^2\,dy \\ &= 4\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Für das erste Integral benutzen wir Polarkoordinaten, d.h. die Transformation

$$h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2, \qquad h(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T.$$

Es gilt $\det(J_h(r,\varphi)) = r$.

Somit ergibt sich mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}\int_{G_1} (x^2+y^2)\,d(x,y) &= \int_{h^{-1}(G_1)} \left(r^2\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\varphi)^2\right)\cdot r\,d(r,\varphi) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r^3\,d\varphi\,dr = \left[\frac{1}{2}\pi r^4\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 2\pi.\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\int_G (x^2+y^2)\,d(x,y) = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

Aufgabe G3 (Zylinderkoordinaten)

Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das Volumen der Punktemenge $M \subset \mathbb{R}^3$, die im Einheitszylinder

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2+y^2 \le 1\}$$

zwischen der (x,y)-Ebene und der Fläche

$$\left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi^2), \varphi \in [0,2\pi), r \in [0,1]\right\}$$

liegt.

Lösung: Wir benutzen den Transformationssatz mit Zylinderkoordinaten. Sei also

$$\tau : \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3,\ \tau(r,\varphi,h) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$$

die Transformation von Zylinder- auf euklidische Koordinaten. Es gilt, dass

$$M = \tau(Z),$$

wobei

$$Z = \{(r,\varphi,h) |\, r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi), h \le \varphi^2\}.$$

Nach dem Integraltransformationssatz berechnet sich das Volumen also

$$V(M) = \iiint_{\tau(Z)} 1 dxdydz = \iiint_Z \det\ d\tau(r,\varphi,h) drdhd\varphi,$$

mit

$$d\,\tau(r,\varphi,h) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass $\det d\tau(r,\varphi,h) = r$ das Volumenelement der Zylinderkoordinaten ergibt. Folglich $V(M) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\varphi^2} r dh dr d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \varphi^2 r dr d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{8}{6}\pi^3$.