Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
27.06.-29.06.11

11. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Riemann-Integrale)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \frac{y}{\sin(2x)} dy \Big) dx.$$

Lösung:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \frac{y}{\sin(2x)} dy \Big) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{y^2}{2\sin(2x)} \Big|_{y=\sin(x)}^{y=\cos(x)} \Big) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{2\sin(2x)} dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{2\sin(2x)} dx = \frac{1}{4} \ln(\sin(2x)) \Big|_{x=\frac{\pi}{6}}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \ln(\frac{2}{\sqrt{3}})$$

Aufgabe G2 (Riemann-Integrale)

Sei $r, h \in]0, \infty[$ und $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2(1 - \frac{z}{h})^2, 0 \leq z \leq h\}$.

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Berechnen Sie $\int_K d(x, y, z)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a)

(b)

$$\int_K d(x,y,z) = \int_0^h \Big(\int_{-r(1-\frac{z}{h})}^{r(1-\frac{z}{h})} \Big(\int_{-\sqrt{r^2(1-\frac{z}{h})^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2(1-\frac{z}{h})^2 - x^2}} dy \Big) dx \Big) dz =$$

$$= \int_0^h \Big(\int_{-r(1-\frac{z}{h})}^{r(1-\frac{z}{h})} 2\sqrt{r^2(1 - \frac{z}{h})^2 - x^2} dx \Big) dz =$$

$$= \int_0^h \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{r^2(1 - \frac{z}{h})^2 - r^2(1 - \frac{z}{h})^2 \sin^2(t)}\; r(1 - \frac{z}{h}) \cos(t) dt \Big) dz =$$

$$\boxed{x = r(1 - \frac{z}{h}) \sin(t), \qquad dx = r(1 - \frac{z}{h}) \cos(t) dt}$$

$$= \int_0^h \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2(1 - \frac{z}{h})^2 \cos^2(t) dt \Big) dz = \int_0^h \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(1 - \frac{z}{h})^2 (1 + \cos(2t)) dt \Big) dz =$$

$$= \int_0^h \Big(r^2(1-\frac{z}{h})^2\big(t+\frac{\sin(2t)}{2}\big)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}}\Big)dz = \int_0^h \pi r^2(1-\frac{z}{h})^2 dz =$$

$$= -\frac{1}{3}\pi r^2 h(1-\frac{z}{h})^3\Big|_{z=0}^{z=h} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Wir erhalten das Volumen des Kegels mit Radius r und Höhe h.

Aufgabe G3 (Riemann-Integrale)

Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Lösung: Das Volumen der Einheitskugel ist $\frac{4}{3}\pi$ und deshalb das Volumen von H ist $V = \frac{2}{3}\pi$. Man kann auch das Integral $V = \int_H d(x,y,z)$ berechnen.

Wegen Rotationssymmetrie der Halbkugel sind die x- und y-Koordinaten des Schwerpunkts Null (natürlich kann man die Integrale $\frac{1}{V}\int_H x\ d(x,y,z)$ und $\frac{1}{V}\int_H y\ d(x,y,z)$ explizit berechnen).

$$\int_H z\ d(x,y,z) = \int_0^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \Big(\int_{-\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{1-z^2-x^2}} z dy\Big) dx\Big) dz =$$

$$= \int_0^1 \pi z(1-z^2)dz = \pi(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^4)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Der Schwerpunkt ist dann $\frac{1}{V}(0,0,\frac{\pi}{4}) = (0,0,\frac{3}{8})$.

Aufgabe G4 (Gaußsche Integralsatz für die Ebene)

Sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ und ∂K sein Rand. Sei

$$F(x,y) = \Big(-\frac{1+y}{(1+x+y)^2}, \frac{x}{(1+x+y)^2} \Big).$$

Berechnen Sie $\int_{\partial K} F$

(a) direkt,

(b) mithilfe dem Gaußschen Integralsatz.

Bonus: Das Ergebnis spricht dafür, dass es einen dritten Weg gibt, um es zu erhalten. Wie sieht dieser aus?

Lösung:

(a)

$$\int_0^1 F(t,0)\cdot(1,0)dt + \int_0^1 F(1-t,t)\cdot(-1,1)dt + \int_0^1 F(0,1-t)\cdot(0,-1)dt =$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{(1+t)^2}dt + \int_0^1 \frac{1+t+1-t}{(1+1)^2}dt + \int_0^1 0dt = \frac{1}{1+t}\Big|_0^1 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

(b)

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{(1+x+y)^2 - x2(1+x+y)}{(1+x+y)^4} = \frac{1-x+y}{(1+x+y)^3}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{(1+x+y)^2 - (1+y)2(1+x+y)}{(1+x+y)^4} = -\frac{-1+x-y}{(1+x+y)^3}$$

$$\int_{\partial K} F = \int_K \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big) d(x,y) = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} 0 dy\Big) dx = 0$$

Wir integrierten F entlang einer geschlossenen Kurve und erhielten 0 — ist F vielleicht ein Gradientenfeld? Ja: $F = \nabla f$, wo $f(x,y) = -\frac{x}{1+x+y}$. Deshalb natürlich $\int_{\partial K} F = 0$.

Hausübung

– Abgabe am 04.07.-06.07.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Riemann-Integrale) (5 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen zwischen dem Paraboloid, gegeben durch $z = 1 - x^2 - y^2$, und der xy-Ebene in $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

$$\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_0^{1-x^2-y^2} dz\Big)dy\Big)dx = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dy\Big)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big(y - x^2y - \frac{1}{3}y^3\Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\Big)dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\Big(1-x^2-\frac{1}{3}(1-x^2)\Big)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}\cos(t)dt = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(t)dt = \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe H2 (Riemann-Integrale) (10 Punkte)

Berechnen Sie die Fläche und den Schwerpunkt der Figur zwischen der x-Achse und dem Graphen von Sinus am Intervall $[0, \pi]$.

Lösung:

$$F = \int_0^{\pi}\sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = 2$$

$$\frac{1}{F}\int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\sin(x)} x dy\Big)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin(x)dx = -\frac{1}{2}x\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

(Natürlich, wegen Symmetrie.)

$$\frac{1}{F}\int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\sin(x)} y dy\Big)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(x)}{2}dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos(2x))dx = \frac{\pi}{8}$$

Der Schwerpunkt ist $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$.

Aufgabe H3 (Gaußsche Integralsatz für die Ebene) (5 Punkte)

Sei W der Rand des Rechtecks $[-1,1] \times [0,1]$ und $F(x,y) = \big(\frac{y^2}{1+x^2}, \arctan(x)y\big)$. Berechnen Sie das Integral $\int_W F$.

Lösung:

$$\int_W F = \int_{[-1,1]\times[0,1]}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)d(x,y) = \int_{-1}^{1}\Big(\int_0^1 -\frac{y}{1+x^2}dy\Big)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{\pi}{4}$$