Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
20.06.-22.06.11

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wegintegral)

Gegeben seien die beiden Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{w}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ -y \end{pmatrix}$$

und zwei Kurven γ_1, γ_2 im $\mathbb{R}^2$.

γ_1 : Der Halbkreis von $(0,-1)^T$ nach $(0,1)^T$ mit Radius 1 und Mittelpunkt in $(0,0)^T$ gegen den Uhrzeigersinn von unten nach oben durchlaufen.

γ_2 : Die Verbindungsstrecke von $(0,-1)^T$ nach $(1,0)^T$ und die Verbindungsstrecke von $(1,0)^T$ nach $(0,1)^T$, ebenfalls von unten nach oben durchlaufen.

Berechnen Sie die Kurvenintegrale von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ jeweils entlang von γ_1 und γ_2. Was fällt auf?

Lösung: Zunächst werden die Kurven γ_1 und γ_2 parametrisiert durch
$\mathbf{c_1}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ für $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\mathbf{c_{2,1}}(t) = (t, t-1)^T$ für $t \in [0,1]$ und $\mathbf{c_{2,2}}(t) = (1-t, t)^T$ für $t \in [0,1]$.

Für die Ableitungen der Parametrisierungen erhält man
$\dot{\mathbf{c_1}}(t) = (-\sin(t), \cos(t))^T$
$\dot{\mathbf{c_{2,1}}}(t) = (1,1)^T$ und $\dot{\mathbf{c_{2,2}}}(t) = (-1,1)^T$.

Nun zu den Integralen:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \mathbf{v}\,\mathbf{ds} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{v}(\mathbf{c_1}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}_\mathbf{1}(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(t),\, \cos(t) - \sin(t)) \cdot (-\sin(t),\, \cos(t))^T\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) - \sin^2(t) - \cos(t)\sin(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) - \sin(t)\cos(t)\,dt \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \mathbf{v}\,\mathbf{ds} &= \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{c_{2,1}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{2,1}}(t)\,dt + \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{c_{2,2}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{2,2}}(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t-1,\, t) \cdot (1,\, 1)^T\,dt + \int_0^1 (t,\, 1-2t) \cdot (-1,\, 1)^T\,dt \\
&= \int_0^1 t + (1-3t)\,dt \\
&= 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Analog erhält man für $\mathbf{w}$:
$\int_{\gamma_1} \mathbf{w}\,\mathbf{ds} = -\frac{\pi}{2}$ und $\int_{\gamma_2} \mathbf{w}\,\mathbf{ds} = -1$.

Es ist offenbar nicht egal, entlang welchen Weges das Vektorfeld $\mathbf{w}$ von $(0,-1)$ nach $(0,1)$ integriert wird. Für $\mathbf{v}$ hingegen scheint der Weg keine Rolle zu spielen. Dass dies tatsächlich so ist, sieht man an den partiellen Ableitungen der beiden Vektorfelder:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x}, \text{ aber } \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial y} = 1 \neq 0 = \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial x}.$$

Im Gegensatz zu $\mathbf{w}$ besitzt $\mathbf{v}$ also ein Potential und dessen Kurvenintegrale sind somit wegunabhängig.

Aufgabe G2 (Berechnen von Stammfunktionen)

(a) Berechnen Sie, falls es möglich ist, eine Stammfunktion von $\mathbf{v}$ auf zwei verschiedene Arten

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \left(\frac{z}{x}, 1, \ln\, x\right)^T$$

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ über der Strecke von Punkt $P_1 = (1,1,1)$ zu Punkt $P_2 = (2,2,3)$.

Lösung:

(a) Die Strecke $\mathbf{c}(t)$ vom Punkt $(1,0,0)$ zum Punkt (x,y,z) wird zerlegt in die Strecke von $(1,0,0)$ nach $(1,y,z)$ und die Strecke von $(1,y,z)$ nach (x,y,z).
(*Bemerkung:* Die y-z-Ebene liegt nicht im Definitionsbereich, somit kann $(0,0,0)$ nicht als Ausgangspunkt gewählt werden.)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c_1}(t) &= (1, ty, tz)^T, \qquad t \in [0,1] \\
\mathbf{c_2}(t) &= (1 + t(x-1),\; y, z)^T \quad t \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$f(x,y,z) = \int_0^1 \mathbf{v}\ (\mathbf{c_1}) \cdot \dot{\mathbf{c}}_1\ dt + \int_0^1 \mathbf{v}\ (\mathbf{c_2}) \cdot \dot{\mathbf{c}}_2\ dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} tz \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} dt + \int \begin{pmatrix} \frac{z}{1+t(x-1)} \\ 1 \\ \ln(1+t(x-1)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 y\ dt + z \int_0^1 \frac{x-1}{1+t(x-1)}\ dt = ty + z\ \ln\ (1+t(x-1))\ \Big|_0^1 \\
&= y + z\ \ln x + c
\end{aligned}
$$

Ansatzmethode:

I $\quad f_x = \frac{z}{x}, \quad$ folglich $\quad f = z \ \ln\ x + g(y,z)$

II $\quad f_y = g_y(y,z) = 1, \quad$ folglich $\quad g(y,z) = y + h(z)$

III $\quad f_z = \ln\ x + h'(z) = \ln\ x, \quad$ folglich $\quad h(z) \equiv c$

und damit $\quad f(x,y,z) = y + z\ \ln\ x + c$

b) $\mathbf{c}(t) = (1+t,\ 1+t,\ 1+2t)^T, \qquad t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{v}(\mathbf{c})\ dt &= f(\mathbf{c}(1)) - (f(\mathbf{c}(0)) \quad \text{mit} \quad f(x,y,z) = y + z\ \ln\ x \\
&= f(2,2,3) - f(1,1,1) \\
&= 2 + 3\ln\ 2 - (1 + \ln\ 1) = 1 + 3\ln\ 2
\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Potentialfeld (oder doch nicht?))

Zeigen Sie, dass das folgende Vektorfeld $\mathbf{v}\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Funktionalmatrix, aber kein Potential in D hat. Woran liegt das?

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\big\}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 \\
\frac{\partial v_2}{\partial x} &= 1 - \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 = \frac{\partial v_1}{\partial y}
\end{aligned}$$

Die Funktionalmatrix ist symmetrisch.

Aber mit $\quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad t \in [0, 2\pi]$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{v}\ d\mathbf{x} &= \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t + \sin t \\ \cos t - \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= -2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt < 0 \quad (\text{da } \sin^2 t > 0 \quad \text{für } t \in (0,\pi) \text{ und } t \in (\pi, 2\pi))
\end{aligned}$$

Da $\int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{v}\ d\mathbf{x} \neq 0$, hat $\mathbf{v}$ kein globales Potential in D.

Grund: D ist nicht sternförmig.

Hausübung

– Abgabe am 27.06.-29.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Wegintegral) (8 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x,y) = (3x+2y, 2x).$$

(a) Betrachten Sie den durch $\gamma(t) = (\cos(t),\, 2\sin(t))$ für $t \in [0, \pi/2]$ gegebenen Weg W. Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_W \mathbf{v}\,\mathbf{ds}$.

(b) Besitzt $\mathbf{v}$ ein Potential φ? Bestimmen Sie es gegebenenfalls.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_W \mathbf{v}\,\mathbf{ds}$ längs eines Weges W, der die Punkte $P_1 = (1,0)$ und $P_2 = (0,2)$ verbindet, unter Verwendung von (ii).

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_W \mathbf{v}\,\mathbf{ds} &= \int_0^{\pi/2} (3\cos(t) + 4\sin(t),\, 2\cos(t))(-\sin(t),\, 2\cos(t))^T\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} -3\sin(t)\cos(t) - 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} -3\sin(t)\cos(t) + 4\cos(2t)\, dt \\
&= -(3/2)\sin^2(t) + 2\sin(2t)\big|_{t=0}^{\pi/2} \\
&= -3/2
\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{v}$ besitzt ein Potential φ, da R^2 offen und sternförmig ist und da gilt

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2 = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Ein Potential φ hat die Form

$$\varphi(x,y) = (3/2)x^2 + 2xy + c.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_W \mathbf{v}\,\mathbf{ds} &= \varphi(0,2) - \varphi(1,0) \\
&= -3/2.
\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Berechnen von Stammfunktionen) (8 Punkte)

Berechnen Sie eine Stammfunktion zu dem Vektorfeld $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}(x,y) := (y+2x,\ x+2)^T$

(a) durch Integration längs eines beliebigen Weges,

(b) mittels Ansatzmethode.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)^T$ vom Punkt (1, 1) zum Punkt (2, 4).

Lösung:

(a) $\mathbf{c}(t) = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$

dann ist

$$f(x,y) = \int_0^1 \begin{pmatrix} ty + 2tx \\ tx + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, dt$$

$$= \int_0^1 (txy + 2tx^2 + txy + 2y)\, dt = \frac{t^2}{2}(2xy + 2x^2) + 2ty\Big|_0^1$$

$$= x^2 + xy + 2y$$

(b) Ansatzmethode:

$f_x = y + 2x, \quad$ folglich $\quad f = xy + x^2 + g(y)$

$f_y = x + g'(y) = x + 2, \quad$ folglich $\quad g(y) = 2y + c$

also $\quad f(x,y) = xy + x^2 + 2y + c$

(c) $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [1,2]$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{v}(\mathbf{c}(t))\, dt &= f(\mathbf{c}\,(2)) - f(\mathbf{c}\,(1)) \\ &= f(2,4) - f(1,1) \\ &= 2 \cdot 4 + 2^2 + 2 \cdot 4 - (1 \cdot 1 + 1^2 + 2 \cdot 1) \\ &= 20 - 4 = 16 \end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Gravitation) (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse 1 bewege sich in der $yz-$Ebene auf dem Kreisbogen, der die Punkte $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$ und $(0,0,1)$ verbindet. Wie gross ist die im Gravitationsfeld verrichtete Arbeit (Kurvenintegral der Gravitationskraft über dem Kreisbogen)? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Bemerkung: Die Gravitationskraft soll durch $G(x) = (0,0,-g)^T$ gegeben sein.

Lösung:

$$\mathbf{c}(t) = (0, \cos t, \sin t), \quad t \in [0,\pi]$$

$$\int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi -g\ \cos t\, dt = -g \sin t\Big|_0^\pi = 0$$

Es wird keine Arbeit verrichtet, da der Höhenunterschied zwischen Anfangs- und Endpunkt Null ist.