Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lesnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
18.04.-20.04.11

1. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gleichmässige Konvergenz von Funktionenfolgen)

Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0, \infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, die Grenzfunktion an.

(a) $f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$,

(b) $g_n(x) = e^x \cdot \sqrt[n]{e}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_n(x) = x + \frac{1}{n} \to x$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert $f_n(x)$ punktweise gegen die Funktion $f(x) = x$. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig, denn unabhängig von x ist für jedes beliebige $\varepsilon > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = |x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

falls $n > n_0 := \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$.

(b) Die Funktionenfolge $g_n(x)$ läßt sich umschreiben zu $g_n(x) = e^x \cdot \sqrt[n]{e} = e^{x+\frac{1}{n}}$. Nach (a) konvergiert $(x + \frac{1}{n})$ für festes $x \in \mathbb{R}$ gegen x. Da die e-Funktion stetig ist, konvergiert $g_n(x)$ punktweise gegen $g(x) = e^x$ für $n \to \infty$. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmässig: Sei $n > n_0$, dann gilt

$$|g_n(x) - g(x)| = e^x \left| e^{\frac{1}{n}} - 1 \right|.$$

Die rechte Seite ist dabei nicht null und kann durch Erhöhung von x beliebig groß gemacht werden, so dass sie jedes zuvor gewählte ε übersteigt. Also muss n_0 in Abhängigkeit von x gewählt werden.

Aufgabe G2 (Potenzreihen)

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die sie konvergieren:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} (x-2)^n$$

(Nicht die Randpunkte vergessen!)

Lösung:

(a) Konvergenzradius mit Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Also ist der Konvergenzradius 0 und die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$.

(b) Konvergenzradius mit Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

also ist der Konvergenzradius 2, die Reihe konvergiert also auf jeden Fall für alle $x \in (0,4)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}\backslash[0,4]$.
Untersuchung der Randpunkte:
$x = 0:\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(0-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent (alternierende harmonische Reihe)
$x = 4:\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(4-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist divergent (harmonische Reihe),
also konvergiert die Reihe für alle $x \in [0,4)$.

Aufgabe G3 (Taylorreihenentwicklung)
Sei $f(x) = \ln(x)$.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

(c) Approximieren Sie $f(\frac{3}{2})$ mit den Taylorpolynomen aus (a) und (b) und schätzen Sie jeweils den Fehler mit Hilfe des Restgliedes ab.

(d) Welche Approximation ist tatsächlich besser?

Lösung:

(a) $f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = -1,\ f'''(1) = 2$

$\Rightarrow T_4(f,1)(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$

(b) $f(2) = \ln(2),\ f'(2) = \frac{1}{2},\ f''(2) = -\frac{1}{4},\ f'''(2) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow T_4(f,2)(x) = \ln(2) + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24}$

(c) a) Approximieren mit $T_4(f,1)(x)$:
$f(1.5) \approx T_4(f,1)(1.5) = (1.5-1) - \frac{(1.5-1)^2}{2} + \frac{(1.5-1)^3}{3} = 0.41\overline{6}$

Fehler:
Für $\xi \in]1, 1.5[$ ist $|R_4(f,1)(1.5)| = \left|\frac{-3!\xi^{-4}}{4!}(1.5-1)^4\right| = \frac{1}{64\xi^4} < \frac{1}{64}$, da $\xi > 1$.

b) Approximieren mit $T_4(f,2)(x)$:
$f(1.5) \approx T_4(f,2)(1.5) = \ln(2) + \frac{(1.5-2)}{2} - \frac{(1.5-2)^2}{8} + \frac{(1.5-2)^3}{24} \approx 0.4067$

Fehler:
Für $\xi \in]1.5, 2[$ ist $|R_4(f,2)(1.5)| = \left|\frac{-3!\xi^{-4}}{4!}(1.5-2)^4\right| = \frac{1}{64\xi^4} < \frac{1}{324}$, da $\xi > 1.5$.

(d) $\ln(1.5) \approx 0.4055$. Also ist die Approximation mit dem Taylorpolynom $T_4(f,2)(x)$ besser. Das hat man aber auch schon erwartet, da der maximale Fehler bei der Approximation mit $T_4(f,2)(x)$ $(\frac{1}{324})$ kleiner ist als der bei der Approximation mit $T_4(f,1)(x)$. Da war der maximale Fehler $\frac{1}{64}$.

Hausübung

– Abgabe am 26.04.-27.04.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen) (7 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktionenfolge $f_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, auf dem Intervall $[0,1]$ nicht, punktweise oder gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Geben Sie, falls existent, die Grenzfunktion an.

(b) Seien $M_1 = [0,1]$ und $M_2 = [1,2]$ und $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Grenzfunktion $g(x)$ von $g_n(x)$ und entscheiden Sie, ob $g_n(x)$ auf M_1 bzw. M_2 gleichmäßig gegen $g(x)$ konvergiert.

Lösung:

(a) Für jedes feste $x \in (0,1]$ gilt $-nx \to -\infty$ für $n \to \infty$ und also $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0$. Für $x = 0$ haben wir $\lim_{n\to\infty} e^{-n\cdot 0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Also konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn bei gleichmäßiger Konvergenz stetiger Funktionen ist die Grenzfunktion wiederum stetig. In unserem Beispiel aber konvergiert die Funktionenfolge stetiger Funktionen gegen eine unstetige Funktion und damit kann also die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

(b) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit konvergiert $g_n(x)$ auf $\mathbb{R}$ (also auch auf M_1 und M_2) punktweise gegen die Nullfunktion. Auf M_1 ist die Konvergenz nicht gleichmäßig: Sei $x_n = \frac{1}{n} \in M_1$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} \right| = \frac{1}{2} \ge \varepsilon.$$

Für $x \in M_2$ ist die Konvergenz gleichmäßig: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Mit $n_0 := \lceil \varepsilon^{-1} \rceil$ gilt für alle $n > n_0$ und für alle $x \in M_2$

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \le \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Aufgabe H2 (Potenzreihen) (6 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Reihen

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k-1} \left(\frac{x}{3}\right)^k$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} (x-1)^{5k}$,

konvergent ?

Lösung:
(a) Mit $a_k = \frac{1}{(3k-1)3^k}$ ergibt sich

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3k-1}{(3k+2)3} \to \frac{1}{3} \qquad (k \to \infty).$$

Der Konvergenzradius ist 3; für $x \in]-3,3[$ ist die Reihe konvergent. Für $x_r = 3$ ist die Reihe wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k-1} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-1} \geq -1 + \frac{1}{3}\sum_{k=1} \frac{1}{k}$$

divergent. Für $x_l = -3$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{3k-1}$ wegen des Leibnizschen Konvergenzkriteriums.

(b) Mit $z = (x-1)^5$ schreibt sich die gegebene Reihe als $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} z^k$.

Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius dieser Reihe: Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

ist dieser $\frac{1}{2}$ nach dem Wurzelkriterium. Also konvergiert die ursprüngliche Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x-1|^5 = |z| < \tfrac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad |x-1| < \tfrac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Der Konvergenzradius ist damit $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$. Für $x_l = 1 - 2^{-\frac{1}{5}}$ bzw. $x_r = 1 + 2^{-\frac{1}{5}}$ erhält man die konvergenten Reihen $sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bzw. $sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}$. Somit konvergiert die Reihe für alle $x \in [1 - 2^{-\frac{1}{5}}, 1 + 2^{-\frac{1}{5}}]$.

Aufgabe H3 (Taylorpolynom) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x}\sin(x)$. Approximieren Sie die Funktion f durch ihr Taylorpolynom mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimmen Sie dabei den Grad des Polynoms so, dass der Fehler auf dem Intervall $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ kleiner als 10^{-8} ist.

Lösung: $f(x) = e^{-x}\sin(x) \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)) \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x}\cos(x)$
$\Rightarrow f'''(x) = 2e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) \Rightarrow f^{(4)}(x) = -4e^{-x}\sin(x)$. pro Ableitung
Damit gilt für das Restglied vom Grad 4:
$|R_4(f,0)(x)| = |\frac{4e^{-\xi}\sin(\xi)}{4!}x^4| = |\frac{e^{-\xi}\sin(\xi)}{3!}x^4| \leq \frac{e^{\frac{1}{100}}}{3!}(\frac{1}{100})^4 \leq (\frac{1}{100})^4 = (\frac{1}{10^2})^4 = 10^{-8}$,
wenn x und damit auch ξ aus dem Intervall $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ sind.
Das Taylorpolynom $T_4(f,0)(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$ approximiert die Funktion f also gut genug.