Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
13.06.-15.06.11

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Parameterintegrale)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 y^2 \sin(xy) dy \Big) dx$$

auf zwei Arten: direkt und durch Austausch der Integrationsreihenfolge.

Aufgabe G2 (Parameterintegrale)
Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils deren Ableitung explizit. Geben Sie zwei Lösungswege an:

- indem Sie $f(x)$ bestimmen und ableiten,
- indem Sie den Integrand partiell differenzieren.

(a) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(y) dy$

(b) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (1 - x^3)(1 - 2xy + y^2) dy$

Aufgabe G3 (Wegintegrale)
Sei die Kurve W die Schnittmenge von dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ und der Ebene $x + y + z = 1$ im Raum $\mathbb{R}^3$.

(a) Parametrisieren Sie W.

(b) Berechnen Sie $\int_W F$, wo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein Vektorfeld, gegeben durch

$$F(x, y, z) = (x + z, y + z, x^2 + y^2).$$

Aufgabe G4 (Zusatzaufgabe)
Parametrisieren Sie die Teile der Kurve im $\mathbb{R}^2$, die auf der $x-$Achse vom Nullpunkt bis zum Punkt $(2, 0)$ läuft, danach auf einem Halbkreis (Mittelpunkt ist $(2, 1)$, Radius ist 1) durch $(3, 1)$ nach oben zum Punkt $(2, 2)$ und dann von diesem Punkt zurück auf die $y-$Achse zum Punkt $(0, 1)$ und schliesslich zurück in den Nullpunkt. Diese Kurve soll im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Hausübung

– Abgabe am 20.06.-22.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Parameterintegrale) (4 Punkte)

Seien F und G stetig differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie, dass

$$y = -e^{-F(x)} \int_0^x e^{F(t)} G(t) dt$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + F'(x)y + G(x) = 0$$

ist.

Aufgabe H2 (Parameterintegrale) (6 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils deren Ableitung explizit.

(a) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \arctan(xy) dy$

(b) $f(x) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}x}^{\frac{\pi}{6}x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy$

Aufgabe H3 (Wegintegrale) (10 Punkte)

Seien

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1} \quad \text{und} \quad G(x,y) = (\nabla f)(x,y).$$

Seien W und Z zwei Wege von $(1,0)$ zu $(-1,0)$: die Strecke zwischen diesen Punkten und der obere Halbkreis mit Radius 1.

Berechnen Sie die Integrale $\int_W G$ und $\int_Z G$. Vergleichen Sie sie mit $f(-1,0) - f(1,0)$.