Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
06.06.-08.06.11

8. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Verpackungsminimierung)

Es soll eine rechteckige Schachtel ohne Deckel mit vorgeschriebenem Volumen V_0 hergestellt werden, wobei die Produktionskosten möglichst gering ausfallen sollen. Sind x, y die Seitenlängen und z die Höhe dieser Schachtel, so sind ihr Volumen V und ihre Oberfläche S gegeben durch

$$V(x, y, z) = xyz, \quad S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

Da die Herstellungskosten proportional zur Oberfläche sind, handelt es sich also um die Bestimmung des Minimums der Funktion S unter der Nebenbedingung $V(x, y, z) = V_0$. Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie aus der Nebenbedingung die Variable z eliminieren, diese dann in S einsetzen und nun $s(x, y) := S(x, y, z(x, y))$ auf Extremstellen untersuchen.

Aufgabe G2 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x, y, z) = x + y + (z - \frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \ .$$

Wie sieht das 0-Niveau von g aus?

Aufgabe G3 (Arithmetisches und geometrisches Mittel dreier Zahlen)

(a) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = xyz - 1 = 0$, sowie $x, y, z > 0$.

(b) Leiten Sie aus (a) die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel her: Für $x, y, z > 0$ gilt stets

$$xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3.$$

Hausübung

– Abgabe am 14.06.-15.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Extrema unter Nebenbedingungen) (5 Punkte)

Bestimmen Sie das Maximum von

$$f(x, y) = xy$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x + y = 1 \ .$$

Wie sieht das 1-Niveau von g aus?

Aufgabe H2 (Extrema auf einer Kreisscheibe) (9 Punkte)

Finden Sie den kleinsten und größten Wert der Funktion $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ auf der Kreisscheibe, gegeben durch $x^2 + y^2 \leq 1$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren des Kreises und dann auf dessen Rand, d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe H3 (Minimaler Abstand) (6 Punkte)

Bestimmen Sie den minimalen Abstand zwischen dem Punkt $M = (4p, p)$ und der Parabel $y = \frac{x^2}{2p}$ für $p > 0$.