Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
30.05.-01.06.11

# 7. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Gradientenvektorfeld)

Zeichnen Sie das Gradientenvektorfeld der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

**Aufgabe G2** (Jacobi-Matrix und Kettenregel)

Wir setzen

- $f(x,y) = (e^{xy}, x-y)$,
- $g(x,y) = xy$ und
- $h = g \circ f$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen (Funktionalmatrizen) von $f$ und $g$.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $h$ auf zwei Arten: direkt und mit der Kettenregel.

**Aufgabe G3** (Implizite Funktionen)

Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = xy(x+y).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f$.

(b) Überzeugen Sie sich, dass es eine Funktion $g$, definiert in einer Umgebung des Punktes $x=1$, gibt, sodass die Gleichung $f(x,g(x)) = 0$ gilt. Wieviele solche differenzierbare Funktionen gibt es?

(c) Für alle diese implizite Funktionen berechnen Sie ihre Ableitungen in $x=1$.

# Hausübung

– Abgabe am 06.06.-08.06.11 in der Übung –

**Aufgabe H1** (Extremwertberechnung) (7 Punkte)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \sin(x)\cos(y).$$

(a) Zeichnen Sie das Gradientenvektorfeld von $f$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von $f$.

**Aufgabe H2** (Invertierbare Matrizen) (6 Punkte)

Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 42 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die inversen Matrizen von denen, die invertierbar sind.

**Aufgabe H3** (Implizite Funktionen) (7 Punkte)

Die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(x, y, z) = \big(4xy + 2xz + 4y - 3z,\ xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z\big).$$

(a) Beweisen Sie, dass die Gleichung $F(x, y, z) = (0, 0)$ bestimmt eine (differenzierbare) implizite Abbildung $G$ in einer Umgebung des Punktes $x = 0$, für die $G(0) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $G$ im Punkt $x = 0$.