Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
23.05.-25.05.11

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Taylorapproximation)
Sei $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^y := e^{y \ln(x)}$.

(i) Wählen Sie geschickt einen Punkt $(x_0, y_0) \in D$, so dass Sie mit Hilfe der Ableitung gut eine Näherung des Funktionswertes an der Stelle $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1.02, 3.01)$ angeben können.

(ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2.Ordnung von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 3)$ und errechnen Sie damit eine Näherung des Funktionswertes an der Stelle $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1.02, 3.01)$.

Aufgabe G2 (Hustensaft)
Die Wirkung $W(x, t)$ von x ml Hustensaft t Minuten nach deren Einnahme werde durch eine Funktion der Form

$$W(x, t) = cx^2(30 - x)t^2e^{-t}$$

beschrieben, wobei c ein positiver Parameter ist.

(i) Geben Sie das Taylor-Polynom von W der Ordnung 2 im Punkt $(x_0, t_0) = (1, 0)$ an.

(ii) Bestimmen Sie die Kombination(en) von Dosis x und Zeit t, bei denen die Wirkung maximal wird.

Aufgabe G3 (Hessematrix)
Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, ob die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^n + y^n,$$

im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\mathrm{Hess} f)(0, 0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Widerspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

Hausübung

– Abgabe am 30.05.-01.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Taylorapproximation für lineare Funktionen) (5 Punkte)

Es sei $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, d.h. $\ell(x,y) = (c_1 \;\; c_2)\binom{x}{y}$.
Geben Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von ℓ im Punkt (a,b) an.
Vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich und begründen Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Aufgabe H2 (Extremwertberechnung) (8 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremstellen und die Sattelpunkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3.$$

Hinweis: Um globale bzw. absolute Extremstellen herauszufinden, ist das Verhalten der Funktion am Rand des Definitionsbereiches, an Definitionslücken (insofern vorhanden) und im Unendlichen zu untersuchen.

Aufgabe H3 (Taylorformel) (7 Punkte)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f(x,y) = x - \cos(xy),\; \text{im Punkt } (1,\pi).$$

Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion f im Punkt $(1,\pi)$ an.