Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
16.05.-18.05.11

5. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Partielle Ableitungen)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{xy^2}$.

(a) Überzeugen Sie sich, dass f unendlich oft stetig differenzierbar ist. Was bedeutet das für die Reihenfolge der partiellen Ableitungen? Wieviele verschiedene partielle Ableitungen k-ter Ordnung gibt es dann?

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von f.

Aufgabe G2 (Gradientenvektorfeld)

Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, in jedem Punkt der Ebene und skizzieren Sie das Gradientenvektorfeld. Skizzieren Sie auch die Niveaulinien von f; was sehen Sie?

Aufgabe G3 (Kettenregel und Richtungsableitung)

Wir setzen

- $X(t) = \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t\big)$,
- $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$ und
- $g = f \circ X$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von X und die totale Ableitung (den Gradienten) von f.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von g auf zwei Arten: direkt (schreiben Sie den Funktionsterm von g auf, dann leiten Sie ihn ab) und mit der Kettenregel.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $(0, 2\pi, 1)$ im Punkt $(1, 0, 1)$. Vergleichen Sie sie mit der Ableitung von g im Punkt $t = 1$. Erklären Sie das Ergebnis.

Hausübung

– Abgabe am 23.05.-25.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Partielle Ableitungen) (8 Punkte)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung und den Gradienten der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

Aufgabe H2 (Kettenregel) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$.

Hinweis: Kettenregel für die Funktionen $g(x, y) = x^y$ und $h(x) = (x, x)$.

Aufgabe H3 (Gradientenvektorfeld und Richtungsableitung) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

(a) Berechnen und skizzieren Sie das Gradientenvektorfeld $(\nabla f)(x, y)$ von f.

(b) Es sei $\mathbf{v} = (1, 1)$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y)$ (die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v}$) auf zwei Arten: direkt via Definition

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x, y) + t\mathbf{v}) - f(x, y)}{t}$$

und mithilfe der Formel $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = (\nabla f)(x, y)\mathbf{v}$.