Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
09.05.-11.05.11

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Länge einer Kurve)

Am Reifen eines Fahrrades (Radius 1) wird ein kleiner leuchtender Punkt angebracht. Wenn das Rad abgerollt wird beschreibt der leuchtende Punkt eine spezielle Kurve γ. Diese wird (gewöhnliche) Zykloide genannt.

(a) Skizzieren Sie die Kurve γ (in der Ebene) und machen Sie sich klar, dass $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ eine mögliche Parametrisierung dieser Zykloide ist.

(b) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ (einer einzigen Periode).

Aufgabe G2 (Krümmung einer Kurve)

Bestimmen Sie Torsion und Krümmung der Kurve $\gamma(t) = \left(t, t^2/2, t^3/6\right)^T$.

Aufgabe G3 (Graphen und Höhenlinien)

Im mathematischen Institut in Neustadt an der Weierstraße wurde eingebrochen. Es fehlen nur ein paar konvergente Reihen, aber bei den Funktionen in zwei Variablen ist vieles durcheinander geraten. Helfen Sie, die Graphen und Höhenlinien der folgenden Funktionen wieder richtig zu ordnen?

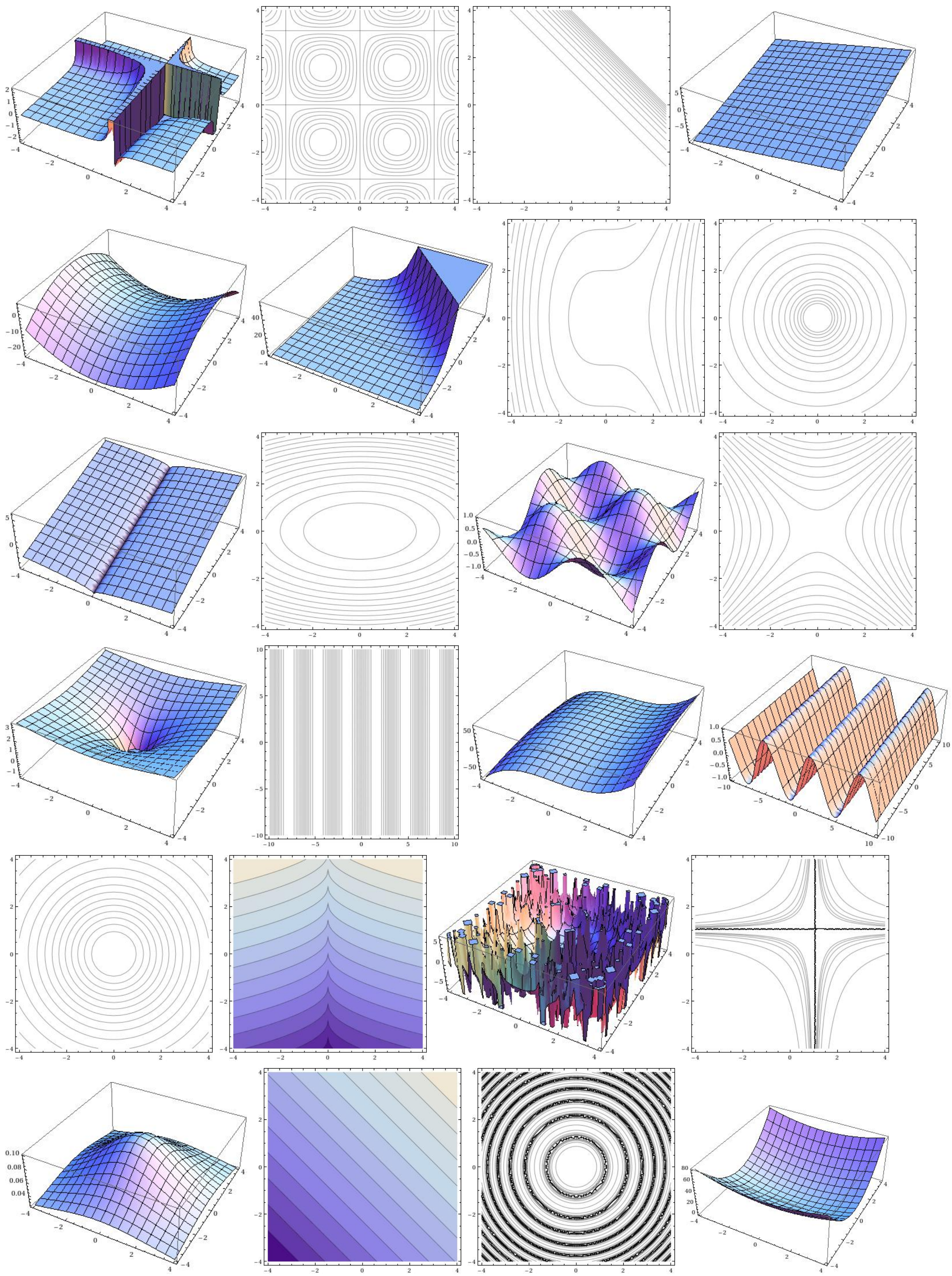
$$\begin{array}{lll}
f_1(x,y) = x + y - 1, & f_2(x,y) = x^2 + 4y^2, & f_3(x,y) = x^2 - y^2 - 8, \\
f_4(x,y) = \sin(x), & f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}, \\
f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), & f_8(x,y) = \tan(x^2+y^2), & f_9(x,y) = e^{x+y}, \\
f_{10}(x,y) = x^3 - y^2 + 4, & f_{11}(x,y) = \sin(x) \cdot \sin(y), & f_{12}(x,y) = \sqrt{|x|} + y
\end{array}$$

Aufgabe G4 (Topologie im $\mathbb{R}^2$)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll}
A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1\}, & E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4\}, \\
B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \le 1\}, & F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 4\}, \\
C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1\}, & G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4, z = 1\}, \\
D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in [-1,1]\}, & H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2 + (y-5)^2 = 4\}.
\end{array}$$

Was sind ihre Randpunkte? Welche dieser Mengen sind abgeschlossen oder kompakt, welche sind offen?



Hausübung

– Abgabe am 16.05.-18.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Länge einer Kurve) (4 Punkte)

Parametrisieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \cosh x$ und berechnen Sie dessen Bogenlänge für $-1 \le x \le 1$.

Aufgabe H2 (Schmiegeebene einer Kurve) (4 Punkte)

Berechnen Sie das begleitende Dreibein der Kurve $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)^T$ an der Stelle $t = 0$ und geben Sie deren Schmiegeebene für $t = 0$ an.

Aufgabe H3 (Graphen und Höhenlinien) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 4x^2 + y^2 - 1.$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(c) Nimmt f ihr Maximum bzw. Minimum auf der Menge $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$ an? Wenn ja, wo?

Aufgabe H4 (Topologie im $\mathbb{R}^2$) (8 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 0\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sin x = 0\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}.$$

Was sind ihre Randpunkte? Welche dieser Mengen sind abgeschlossen oder kompakt, welche sind offen?