Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
02.05.-04.05.11

3. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Erinnerung: Wie stets müssen alle Aussagen begründet werden.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stetigkeit in höherdimensionalen euklidischen Räumen)
Sie haben die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vorliegen:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0, \\ \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Sind die beiden Komponentenfunktionen

$$k_1(x) = f(x,0), \qquad k_2(y) = f(0,y)$$

stetig?

(b) Ist f eine stetige Funktion? Falls ja: weisen Sie nach, dass dem so ist. Anderenfalls geben Sie explizit eine Folge $a_n = (x_n, y_n)$ an, sodass $f(\lim_{n\to\infty} a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

Aufgabe G2 (Konstruktion eines Kreises)
Parametrisieren Sie die Kreisbahn als eine Funktion $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die durch die Punkte $(0,0)$, $(3,-1)$, $(8,4)$ geht.

Aufgabe G3 (Eigenschaften von Kurven)
Es sei die Kurve $X\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ als $X(t) = [t^3, t^4, \cos(t^2)]^T$ gegeben.

(a) Ist diese Kurve stetig, differenzierbar, regulär?

(b) Finden Sie eine reguläre Reparametrisierung der Bahn von X.

Hausübung

– Abgabe am 09.05.-11.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Konvergenz in höherdimensionalen euklidischen Räumen) (3 Punkte)
Finden Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2^{-n}, \arctan(n), \cos(\frac{1}{n})\right)$ in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe H2 (Stetigkeit in höherdimensionalen euklidischen Räumen) (10 Punkte)
Sei $f(x,y) = \arctan\left(e^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.

(b) Finden Sie eine stetige Erweiterung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f.

(c) Zeigen Sie, dass die Kurve $X\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $X(t) = g(t,0)$, differenzierbar, aber nicht regulär ist.
Hinweis: Differenzenquotient, l'Hospitalsche Regel

Aufgabe H3 (Kurven) (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $X\colon [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^3$, $X(t) = [\cos(t), \sin(t), \tan(t)]^T$, eine Parametrisierung von der Schraubenlinie, gegeben durch

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = xz, \quad |z| \leq 1, \quad x > 0,$$

ist.

(b) Beweisen Sie, dass X regulär ist.