



2. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Erinnerung: Wie stets müssen alle Aussagen begründet werden.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Grenzwerte und Häufungspunkte)

Finden Sie alle Häufungspunkte und Grenzwerte der folgende Folgen.

(a) $a_n = \cos(n\pi) \cdot \frac{1}{n}$

(b) $b_n = \cos(n\pi) \cdot (1 - \frac{1}{n})$

Aufgabe G2 (Trigonometrische Identitäten)

Beweisen Sie die Gleichungen

(a) $\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

(b) $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wo die Ausdrücke definiert sind.

Aufgabe G3 (Fourier-Entwicklung)

Es sei die Funktion $f: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ als $f(x) = x$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f .

(b) Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Fourierreihe mit diesen Koeffizienten. Schreiben Sie sie auf.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = g(x)$?

(c) Berechnen Sie die Werte $g(2\pi)$ und $g(10)$.

(d) Schreiben Sie auch die komplexe Version dieser Fourierreihe auf.

Hausübung

– Abgabe am 02.05.-04.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Wiederholung: Trigonometrische Identitäten)

(6 Punkte)

Beweisen Sie mit der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$:

- (a) $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- (b) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$
- (c) $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- (d) $(r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

Aufgabe H2 (Fourier-Entwicklung)

(11 Punkte)

Stellen Sie die reellen und komplexen Fourierreihen der folgenden Funktionen dar. Wo sind die reellen Fourierreihen stetig und wo differenzierbar?

- (a) $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + 1$
- (b) $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(\frac{x}{2})$
- (c) $h: (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^x$

Aufgabe H3 (Fourier-Entwicklung)

(3 Punkte)

Bestimmen Sie (mit höchstens vier Zeilen Rechnung) die Fourierreihen der Funktionen

$$f(x) = \cos^2(x), \quad g(x) = \sin^2(x).$$

Hinweis: H1(b)