



10. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Wegintegral)

Gegeben seien die beiden Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w}(x, y) = \begin{pmatrix} y - x \\ -y \end{pmatrix}$$

und zwei Kurven γ_1, γ_2 im \mathbb{R}^2 .

γ_1 : Der Halbkreis von $(0, -1)^T$ nach $(0, 1)^T$ mit Radius 1 und Mittelpunkt in $(0, 0)^T$ gegen den Uhrzeigersinn von unten nach oben durchlaufen.

γ_2 : Die Verbindungsstrecke von $(0, -1)^T$ nach $(1, 0)^T$ und die Verbindungsstrecke von $(1, 0)^T$ nach $(0, 1)^T$, ebenfalls von unten nach oben durchlaufen.

Berechnen Sie die Kurvenintegrale von \mathbf{v} und \mathbf{w} jeweils entlang von γ_1 und γ_2 . Was fällt auf?

Aufgabe G2 (Berechnen von Stammfunktionen)

(a) Berechnen Sie, falls es möglich ist, eine Stammfunktion von \mathbf{v} auf zwei verschiedene Arten

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(\frac{z}{x}, 1, \ln x \right)^T$$

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von \mathbf{v} über der Strecke von Punkt $P_1 = (1, 1, 1)$ zu Punkt $P_2 = (2, 2, 3)$.

Aufgabe G3 (Potentialfeld (oder doch nicht?))

Zeigen Sie, dass das folgende Vektorfeld $\mathbf{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Funktionalmatrix, aber kein Potential in D hat. Woran liegt das?

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

Hausübung

– Abgabe am 27.06.-29.06.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Wegintegral)

(8 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y) = (3x + 2y, 2x).$$

- (a) Betrachten Sie den durch $\gamma(t) = (\cos(t), 2 \sin(t))$ für $t \in [0, \pi/2]$ gegebenen Weg W . Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_W \mathbf{v} \, ds$.
- (b) Besitzt \mathbf{v} ein Potential φ ? Bestimmen Sie es gegebenenfalls.
- (c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_W \mathbf{v} \, ds$ längs eines Weges W , der die Punkte $P_1 = (1, 0)$ und $P_2 = (0, 2)$ verbindet, unter Verwendung von (ii).

Aufgabe H2 (Berechnen von Stammfunktionen)

(8 Punkte)

Berechnen Sie eine Stammfunktion zu dem Vektorfeld $\mathbf{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{v}(x, y) := (y + 2x, x + 2)^T$$

- (a) durch Integration längs eines beliebigen Weges,
- (b) mittels Ansatzmethode.
- (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von \mathbf{v} längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)^T$ vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(2, 4)$.

Aufgabe H3 (Gravitation)

(4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse 1 bewege sich in der yz -Ebene auf dem Kreisbogen, der die Punkte $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ verbindet. Wie gross ist die im Gravitationsfeld verrichtete Arbeit (Kurvenintegral der Gravitationskraft über dem Kreisbogen)? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Bemerkung: Die Gravitationskraft soll durch $G(x) = (0, 0, -g)^T$ gegeben sein.