Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lesnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
18.04.-20.04.11

1. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gleichmässige Konvergenz von Funktionenfolgen)

Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0,\infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, die Grenzfunktion an.

(a) $f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$,

(b) $g_n(x) = e^x \cdot \sqrt[n]{e}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G2 (Potenzreihen)

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die sie konvergieren:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n!x^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-2)^n$$

(Nicht die Randpunkte vergessen!)

Aufgabe G3 (Taylorreihenentwicklung)

Sei $f(x) = \ln(x)$.

(a) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

(c) Approximieren Sie $f(\frac{3}{2})$ mit den Taylorpolynomen aus (a) und (b) und schätzen Sie jeweils den Fehler mit Hilfe des Restgliedes ab.

(d) Welche Approximation ist tatsächlich besser?

Hausübung

– Abgabe am 26.04.-27.04.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen) (7 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktionenfolge $f_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, auf dem Intervall $[0, 1]$ nicht, punktweise oder gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Geben Sie, falls existent, die Grenzfunktion an.

(b) Seien $M_1 = [0, 1]$ und $M_2 = [1, 2]$ und $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Grenzfunktion $g(x)$ von $g_n(x)$ und entscheiden Sie, ob $g_n(x)$ auf M_1 bzw. M_2 gleichmäßig gegen $g(x)$ konvergiert.

Aufgabe H2 (Potenzreihen) (6 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Reihen

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k-1} \left(\frac{x}{3}\right)^k$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} (x-1)^{5k}$,

konvergent ?

Aufgabe H3 (Taylorpolynom) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x} \sin(x)$. Approximieren Sie die Funktion f durch ihr Taylorpolynom mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimmen Sie dabei den Grad des Polynoms so, dass der Fehler auf dem Intervall $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ kleiner als 10^{-8} ist.