FUNKTIONENTHEORIE II
TU DARMSTADT, 2-STÜNDIG, WS 2008/09

KARSTEN GROSSE-BRAUCKMANN

Inhaltsverzeichnis

LITERATUR

[A] Ahlfors: Complex Analysis, Mc Graw-Hill 1953, 1979. Der Klassiker. Die Geometrie komplexer Abbildungen wird betont.

[BF] Freitag, Busam: Funktionentheorie 1. Ein gut durchdachtes, expliztes Buch. Vielleicht das beste zum Lernen und Verstehen. Springer 1993, 2000

[C] Conway: Complex Analysis I+II. Hier findet man alles.

[FL] Fischer-Lieb: Funktionentheorie + Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie, Vieweg. Konzis.

[R] Remmert: Funktionentheorie, Springer. Gemächlich, interessante historische Bemerkungen.

[F] Fritzsche: Grundkurs Funktionentheorie, Spektrum 2009. Viele interessante Anwendungen werden angegeben.

EINFÜHRUNG

Diese Vorlesung hat sich angeschlossen an eine zweistündige erste Funktionentheorie-Vorlesung. Die Themen sind nicht ungewöhnlich: Riemannscher Abbildungssatz, der Weierstrasssche Produktsatz und die Gamma-Funktion, sowie elliptische Funktionen. Ich habe dazu die angegebene Literatur benutzt, insbesondere das Buch von Freitag/Busam und von Fischer/Lieb.

Darmstadt, Februar 09 Karsten Große-Brauckmann

1. Konforme Abbildungen

1. Vorlesung, Donnerstag 15.10.08

Mit diesem Kapitel verfolge ich zwei Ziele: Zum einen möchte ich den Hintergrund für den Riemannschen Abbildungssatz schaffen. Zum anderen bin ich Geometer und möchte daher gern die Funktionentheorie in den allgemeinen Rahmen winkeltreuer Abbildungen einfügen. Es wird sich zeigen, dass der Fall von zwei Dimensionen ganz besonders ist: Im Falle höherer Dimension lassen sich winkeltreue Abbildungen klassifizieren, nur in zwei Dimensionen gibt es eine große Fülle davon.

1.1. **Konforme Abbildungen in beliebiger Dimension.** Wir beginnen unsere Diskussion mit dem linearen Fall.

Definition. Eine lineare Abbildung in $\mathsf{GL}(n)$, $v \mapsto Av$, heißt *Ähnlichkeit [similarity]*, wenn es ein $\mu > 0$ gibt mit $\|Av\| = \mu\|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen die Gruppe der Ähnlichkeiten mit $\mathsf{Sim}(n)$.

Im Falle $\mu = 1$ ist eine Ähnlichkeit eine orthogonale Abbildung, und daher kann man jede Ähnlichkeit als Verknüpfung einer Drehung (oder Drehspiegelung) in $\mathsf{O}(n)$ mit einer Homothetie $v \mapsto \mu v$ schreiben.

Wegen der Parallelogramm-Identität

$$4\langle v, w\rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$$

werden Ähnlichkeiten genausogut charakterisiert durch

$$\big\langle Av, Aw\big\rangle = \mu^2\langle v, w\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \mu > 0. \tag{1}$$

Daraus folgt, dass eine Ähnlichkeit *winkeltreu* ist, denn es gilt für die Winkel zwischen zwei linear unabhängigen Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\cos\angle(v, w) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{\mu^2\langle v, w\rangle}{\mu\|v\|\,\mu\|w\|} \overset{(1)}{=} \frac{\big\langle Av, Aw\big\rangle}{\|Av\|\|Aw\|} = \cos\angle\big(Av, Aw\big). \tag{2}$$

Eine Ähnlichkeit kann orientierungserhaltend oder -umkehrend sein, d.h. positive oder negative Determinante haben.

Wir kommen jetzt zum nicht-linearen Fall.

Definition. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f \in C^1(U, V)$ heißt *konform [conformal]*, wenn ihr Differential in jedem Punkt $x \in U$ eine Ähnlichkeit ist, $df_x \in \mathsf{Sim}(n)$, d.h.

$$\exists \mu\colon U \to (0, \infty) : \|df_x(v)\| = \mu(x)\|v\| \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, x \in U.$$

Dabei nennt man die Funktion $\mu(x)$ den *Konformfaktor* von f.

Auch im nichtlinearen Fall kann man Winkeltreue definieren: Schneiden sich zwei differenzierbare Kurven $\gamma, \eta \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $p = \gamma(0) = \eta(0)$, und verschwinden ihre Tangentialvektoren in diesem Punkt nicht, so soll $\angle\big(\gamma'(0), \eta'(0)\big)$ ihr Schnittwinkel sein. Aber nach der Kettenregel gilt dann für die Bildkurven $f \circ \gamma$, $f \circ \eta$, dass

$$\cos\angle\big((f\circ\gamma)'(0), (f\circ\eta)'(0)\big) = \cos\angle\big(df_p\gamma'(0), df_p\eta'(0)\big) \overset{(2)}{=} \cos\angle\big(\gamma'(0), \eta'(0)\big).$$

In diesem Sinn sind konforme Abbildungen *winkeltreu*.

Das Differential einer konformen Abbildung hat immer Rang n, denn $\mu \neq 0$. Man spricht manchmal von *schwach konformen* Abbildungen, wenn der Fall $\mu(x) = 0$ zugelassen wird.

Die Bedeutung konformer Abbildungen ist auf Anhieb nicht ersichtlich. Natürlich spielen sie klassisch in der Kartographie eine Rolle, d.h. als Abbildungen von der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Beispielsweise ist die Mercator-Projektion dadurch eindeutig bestimmt, dass sie Längengerade auf parallele Geraden abbildet und winkeltreu ist. Zeigen Sie dies und berechnen Sie, wohin die Pole abgebildet werden (siehe Aufgaben).

Wichtig werden konforme Abbildungen in Mathematik und Physik dadurch, dass die Potential-Gleichung $\Delta f = 0$ invariant unter konformen Abbildungen bleibt Unter konformen Abbildungen wird daher ein elektrisches Feld erneut in ein mögliches elektrisches Feld transformiert, und das gleiche gilt für ein Gravitationsfeld oder idealisierte Flüssigkeitsbewegung. Für unhandliche Geometrien kann daher eine konforme Tranformation auf eine Geometrie mit explizit bekannten Lösungen dazu dienen, solche Felder zu berechnen. Siehe Fritzsche, Abschnitt 1.5.

1.2. **Konforme Abbildungen in Dimension zwei.** In Funktionentheorie I hatten wir die Cauchy-Riemann-Gleichungen aus der Winkeltreue hergeleitet. Wir rechnen hier noch einmal umgekehrt nach, dass diese Gleichungen die Konformität implizieren. Schreiben wir $z = x + iy$ und $f(z) = u(z) + iv(z)$, so folgt aus den Cauchy-Riemann Gleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ zunächst

$$|f_x|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 = |f_y|^2 \qquad \text{und} \qquad \langle f_x, f_y\rangle = u_x u_y + v_x v_y = 0. \tag{3}$$

Nach Linearität ist daher tatsächlich

$$\begin{aligned} \big\langle df(v), df(w)\big\rangle &= \big\langle df(v_1e_1 + v_2e_2), df(w_1e_1 + w_2e_2)\big\rangle \\ &= \big\langle v_1f_x + v_2f_y, w_1f_x + w_2f_y\big\rangle = |f_x|^2 v_1w_1 + |f_y|^2 v_2w_2 = |f_x|^2\langle v, w\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Sofern also der Konformfaktor $\mu(z) := |f_x(z)|^2 = |f_y(z)|^2$ auf ganz U nicht verschwindet, ist f konform. In Dimension $n = 2$ sind damit holomorphe Abbildungen mit nicht-verschwindender Ableitung konform. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen implizieren auch, dass eine holomorphe Abbildung die Orientierung erhält:

$$\det df = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} = u_x^2 + u_y^2 \geq 0. \tag{5}$$

Aber es gibt noch einen weiteren Typ konformer Abbildungen der Ebene: Eine Abbildung $f = u + iv \in C^1(U, \mathbb{C})$ heißt *antiholomorph*, wenn auf ganz $U \subset \mathbb{C}$ folgende Variante der Cauchy-Riemann-Gleichungen gilt:

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x \tag{6}$$

Auch in diesem Fall gilt (3) und daher auch die Folgerung (4). Andererseits gilt analog zu (5) für antikonforme Abbildungen $\det df \leq 0$, d.h. sie sind orientierungsumkehrend.

Beispiel. $f(z) = \overline{z}$ ist antiholomorph.

In Dimension zwei kann man konforme Abbildungen folgendermaßen charakterisieren:

Satz 1. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ ist konform genau dann, wenn sie überall in U nicht-verschwindendes Differential hat und entweder holomorph oder antiholomorph ist.*

Beweis. Die Richtung "$\Leftarrow$" haben wir in beiden Fällen bereits gezeigt.

"$\Rightarrow$": Ist f konform, so gilt auf U

$$|f_x| = |f_y| \qquad \text{und} \qquad \langle f_x, f_y \rangle = 0, \tag{7}$$

wobei $|f_x| = |f_y|$ nicht verschwindet, also auch df nicht. Nach (7) steht f_x senkrecht auf f_y und beide Vektoren haben die gleiche Länge. In Dimension $n = 2$ bedeutet das aber

$$f_y = \pm i f_x \qquad \text{für jeden Punkt } z \in U.$$

Aber weil U Gebiet ist, und f_x und f_y stetig sind, muss das Vorzeichen $\pm$ konstant auf U sein. Also gilt entweder $f_y = i f_x$ und Trennen von Real- und Imaginärteil liefert Cauchy Riemann, oder $f_y = -i f_x$ und entsprechend gilt (6). $\square$

`2. Vorlesung, Donnerstag 22.10.08` ____

1.3. **Konforme Äquivalenz.** Diese Feststellung bzw. der Satz rechtfertigen die folgende Sprechweise:

Definition. (i) Eine bijektive holomorphe Abbildung f zwischen zwei Gebieten $U, V \subset \mathbb{C}$ heißt *biholomorph.*
(ii) Fall $n = 2$: Gebiete $U, V \subset \mathbb{C}$ heißen *biholomorph äquivalent*, wenn eine biholomorphe Abbildung $f\colon U \to V$ existiert.
(iii) Fall $n \geq 2$: Gebiete $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen heißen *konform äquivalent*, wenn ein konformer Homöomorphismus $f \in C^1(U, V)$ existiert.

Tatsächlich handelt es sich hierbei um Äquivalenzrelationen. Reflexivität und Transitivität sind offensichtlich. Die Symmetrie ist allerdings noch zu zeigen.

Betrachten wir zuerst den Fall eines konformen C^1-Homöomorphismus zwischen n-dimensionalen Mengen. Konformitäten haben eine invertierbare Jacobimatrix und damit ist ihre Umkehrabbildung ebenfalls C^1, so dass konforme Homöomorphismen sogar Diffeomorphismen sind (siehe An II, 7.1.2, Prop. 2).

Im Reellen ist die dritte Potenz, $\cdot^3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ein Beispiel einer differenzierbaren bijektiven Abbildung mit nicht differenzierbarer Umkehrabbildung. Im Komplexen gilt hingegen folgende Aussage, so dass wir auch für biholomorphe Abbildungen die Symmetrie bestätigen können.

Satz 2. *Ist $f\colon U \to V$ bijektiv und holomorph, so ist auch f^{-1} holomorph.*

Beweis. Sei $a \in U$. Wir behaupten $f'(a) \neq 0$. Dann folgt aus dem Umkehrsatz, dass f eingeschränkt auf eine Umgebung von a eine holomorphe Umkehrabbildung hat.

Zum Beweis der Behauptung verwenden wir ein Argument, das wir bereits für den Satz von der Gebietstreue verwendet haben. Wäre $f'(a) = 0$, so hätte f in einer Umgebung $B_r(a)$ von a die Potenzreihe

$$f(z) = a_0 + a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots \qquad \text{mit } a_n \neq 0 \quad \text{für } n \geq 2,$$

also

$$f(z) - a_0 = (z-a)^n\big[a_n + a_{n+1}(z-a) + \ldots\big].$$

Nach Teil I, Lemma 33 könnten wir die n-te Wurzel aus $[\ldots]$ ziehen und daher schreiben

$$f(z) - a_0 = \big((z-a)h(z)\big)^n \qquad \text{mit } h : B_r(a) \to \mathbb{C} \text{ holomorph.}$$

Schreiben wir $H(z) := (z-a)h(z)$, so gilt $H'(a) = h(a)$, was wegen $a_n \neq 0$ nicht verschwindet. Nach dem Umkehrsatz nimmt daher H alle Werte in einer Umgebung von $H(a)$ an, und daher nimmt $f(z) - a_0$ alle Werte in einer Umgebung von $f(a) - a_0$ sogar n-mal an. Für $n \geq 2$ ist das ein Widerspruch zur angenommenen Bijektivität von $f - a_0$. $\square$

In konkreten Fällen ist es oft schwer, die biholomorphe oder konforme Äquivalenz zweier Gebiete zu bestätigen, da man dazu eine entsprechende Abbildung finden muss. Mit dem Riemannschen Abbildungssatz werden wir zeigen, dass einfach zusammenhängende ebene Gebiete stets konform äquivalent sind, eine Aussage die in höherer Dimension jedoch nicht stimmt. Manchmal ist es aber einfach, festzustellen, dass zwei Gebiete nicht konform äquivalent sind:

Beispiele. 1. Wenn zwei offene Mengen verschiedene Topologie haben, d.h. es existiert kein Homöomorphismus zwischen ihnen, dann können sie erst recht nicht konform äquivalent sein. Dies gilt etwa für Mengen mit unterschiedlich vielen Zusammenhangskomponenten oder für Kreisring $A_{r,R}$ und Kreisscheibe, da (siehe Aufgaben:) einfacher Zusammenhang unter Homöomorphismen erhalten bleibt.
2. Die Mengen D und $\mathbb{C}$ haben gleiche Topologie (wie lautet ein Homöomorphismus?) sind aber nach dem Satz von Liouville nicht konform äquivalent.
3. Zwei Kreisringe $A_{r,R}$ und $A_{\rho,P}$ sind genau dann bihomorph äquivalent, wenn $r/R = \rho/P$.

1.4. **Automorphismen von $\mathbb{C}$.** Konforme Abbildungen von U nach V bleiben erhalten, wenn wir sie mit konformen Abbildungen des Urbildes U in sich selbst, bzw. des Bildes V in sich selbst, verknüpfen. Daher sollte man diese Selbstabbildungen kennen, bevor man sämtliche konformen Abbildungen von U nach V studiert. Im funktionentheoretischen Fall ist folgende Bezeichnung üblich:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet. Eine biholomorphe Abbildung $f\colon U \to U$ heißt *Automorphismus* von U. Die Menge aller Automorphismen bezeichnen wir mit $\operatorname{Aut} U$.

Offensichtlich ist $\operatorname{Aut} U$ eine Gruppe. Für den Fall $U = \mathbb{C}$ sind die Automorphismen gerade alle nicht-konstanten affin-linearen Abbildungen, die man in diesem Zusammenhang als *(affin) lineare Transformationen* bezeichnet:

Satz 3. $\operatorname{Aut} \mathbb{C} = \{f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f(z) = az + b : a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$

Beweis. Sicherlich ist jede lineare Transformation ein Automorphismus von $\mathbb{C}$.

Um die Umkehrung zu zeigen, betrachten wir das Verhalten von $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}$ in ∞: Weil f eine Potenzreihe hat, die auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, gilt für jedes $w \in \mathbb{C}^*$, dass $f(\frac{1}{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{w^n}$. Die Funktion $f \circ \overline{\operatorname{inv}}$ hat also eine auf $\mathbb{C}^*$ konvergente

Laurentreihe; dabei haben wir $\overline{\text{inv}}(z) := 1/z$ geschrieben. Weil f und $\overline{\text{inv}}$ bijektiv sind, muss $f \circ \overline{\text{inv}} \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ injektiv sein.

Nehmen wir an, dass die Laurentreihe nun nicht abbricht, also $f \circ \overline{\text{inv}}$ eine wesentliche Singularität in 0 hat. Dann liegt nach dem Satz von Casorati-Weierstrass $(f \circ \overline{\text{inv}})(\overline{D} \setminus \{0\})$ dicht in $\mathbb{C}$. Anderseits ist $(f \circ \overline{\text{inv}})(\mathbb{C} \setminus D) = f(D \setminus \{0\})$ ein nicht-leeres Gebiet in $\mathbb{C}$. Diese nicht-leere offene Menge ist wegen der Injektivität von f disjunkt zu der in $\mathbb{C}$ dichten Menge $(f \circ \overline{\text{inv}})(D)$, Widerspruch.

Also hat die Laurentreihe von $f \circ \overline{\text{inv}}$ nur endlich viele Terme und f ist Polynom. Wenn der Grad n dieses Polynoms größer als eins ist, kann das Polynom nicht bijektiv sein (beispielsweise hat es laut Hauptsatz der Algebra n Nullstellen!). Ist der Grad null, so ist das Polynom konstant und ebenfalls nicht bijektiv. Als einziger möglicher Grad bleibt $n = 1$ übrig, d.h. wir erhalten die behauptete Darstellung mit $a \neq 0$. $\square$

1.5. **Konforme Abbildungen in höherer Dimension.** Um den funktionentheoretischen Fall zu beleuchten, diskutieren wir hier konforme Abbildungen und Automorphismen in höherer Dimension.

Satz 4 (Liouville). *Es sei $n \geq 3$.*
(i) Ist $f \in C^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ konform, so ist f surjektiv und bis auf Translation eine Ähnlichkeit.
(ii) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet und $f \in C^4(U, \mathbb{R}^n)$ konform, so ist f bis auf Translation die Einschränkung auf U von einer Ähnlichkeit oder von einer Inversion an einer Sphäre mit Radius $R > 0$.

Die Aussage bedeutet folgendes. Entweder gilt

$$f(x) = aAx + b \qquad \text{mit } A \in \mathsf{O}(n), \;\; b \in \mathbb{R}^n, \;\; a > 0, \tag{8}$$

oder als weitere Möglichkeit im Fall (ii),

$$f(x) = R^2 \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2} + b \qquad \text{mit } x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus U, \;\; b \in \mathbb{R}^n, \;\; R > 0. \tag{9}$$

Aussage (i) ist eine direkte Folgerung aus (ii), denn für $U = \mathbb{R}^n$ gibt es kein x_0 wie in (9).

Vergleichen wir die Aussage des Satzes mit dem funktionentheoretischen Fall $n = 2$. Für Aussage (i) gibt es einen viel größeren Vorrat an konformen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$: Die Exponentialfunktion oder jede andere holomorphe Abbildung mit nicht-verschwindender Ableitung ist ein Beispiel. Nur falls f surjektiv ist, stimmt Aussage (i) überein mit Satz 3, denn eine lineare Transformation $z \mapsto az + b$ ist ja gerade eine Ähnlichkeit. Auch Aussage (ii) unterscheidet sich fundamental vom Fall holomorpher Abbildungen $f \colon U \to \mathbb{C}$: Der

Raum holomorpher Abbildungen ist unendlich dimensional, aber die konformen Abbildungen ab Dimension 3 sind explizit gegeben; ihr Raum ist endlich dimensional.

`Folgender Beweis nicht in der Vorlesung gebracht`

Die Voraussetzung der viermaligen Differenzierbarkeit im Satz ist rein technischer Natur: Der Beweis wird schwieriger, wenn man nur C^1 voraussetzt. Die Aussage des Satzes bedeutet, dass die Abbildungen in Wahrheit glatt sind.

Zunächst eine Vorbemerkung zum Beweis. Mit $d^2 f_x(v,w) = \sum \partial_{ij} f(x)\, v_i\, w_j$ bezeichnen wir die Hesse-Form; sie ist die Richtungsableitung des Differentials: $d^2 f_x(v,w) = D_v(df_x(w))$. Analog notieren wir weitere Richtungsableitungen: $d^3 f_x(u,v,w) = D_v(d^2 f_x(v,w)) = \sum \partial_{ijk} f(x)\, u_i\, v_j\, w_k$.

Beweis. Wir wollen (8) oder (9) herleiten. Dazu müssen wir zeigen, dass der Konformfaktor $\mu(x) = a$ konstant ist bzw. im zweiten Fall $R^2/\|x - x_0\|$ lautet. Wir werden diese Gleichungen durch wiederholtes Ableiten der Konformitätsrelation gewinnen.

Sei $f \in \mathsf{Conf}(U, \mathbb{R}^n)$, also $df_x \in \mathsf{Sim}(n)$ für alle $x \in U$ mit Konformfaktor $\mu(x) > 0$. Betrachten wir zwei orthogonale Vektoren $u \perp v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\big\langle df_x(u), df_x(v) \big\rangle = 0$ und die Richtungsableitung des Skalarprodukts in Richtung $w \in \mathbb{R}^n$ liefert

$$\big\langle d^2 f_x(u,w), df_x(v) \big\rangle + \big\langle df_x(u), d^2 f_x(v,w) \big\rangle = 0. \tag{10}$$

Wir definieren für jedes $x \in U$ eine multilineare Abbildung

$$k_x \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad k_x(u,v,w) := \big\langle df_x(u), d^2 f_x(v,w) \big\rangle.$$

Wegen der Symmetrie der Hesse-Form ist k_x symmetrisch in den letzten beiden Einträgen und nach (10) ist k_x schiefsymmetrisch bezüglich der ersten beiden Einträge (für $u \perp v$ und w beliebig). Das bedeutet aber, dass k_x für jedes $x \in U$ und $u \perp v$ verschwinden muss, denn

$$\begin{aligned} k_x(u,v,w) &= -k_x(v,u,w) = -k_x(v,w,u) = k_x(w,v,u) \\ &= k_x(w,u,v) = -k_x(u,w,v) = -k_x(u,v,w). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $k_x(u,v,w) = 0$ für jedes $u \perp \operatorname{span}\{v,w\}$. Weil Orthogonalität unter df_x erhalten wird, gilt äquivalent: $k_x(u,v,w) = 0$ für jedes u mit $df(u) \perp \operatorname{span}\{df_x(v), df_x(w)\}$. Aber das bedeutet, dass $d^2 f_x(v,w)$ ein Vektor ist, der linear abhängig von $df_x(v)$ und $df_x(w)$ sein muss, also $d^2 f_x(v,w) \in \operatorname{span}\big\{df_x(v), df_x(w)\big\}$, d.h. es existieren Funktionen $\alpha, \beta \colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$d^2 f_x(v,w) = \alpha(x)\, df_x(v) + \beta(x)\, df_x(w) \tag{11}$$

für jedes feste Paar orthogonaler Vektoren $v \perp w \in \mathbb{R}^n$.

Nun bilden wir die Richtungsableitung von $\|df_x(v)\|^2 = \mu^2(x)\|v\|^2$ in Richtung $w \in \mathbb{R}^n$ um zu erhalten $\big\langle d^2 f_x(v,w), df_x(v) \big\rangle = d\mu_x(w)\, \mu(x)\|v\|^2$. Setzen wir nun (11) hierein ein, so erhalten wir wegen $df_x(v) \perp df_x(w)$

$$d\mu_x(w)\, \mu(x)\|v\|^2 = \big\langle d^2 f_x(v,w), df_x(v) \big\rangle \overset{(11)}{=} \alpha(x)\|df_x(v)\|^2 = \alpha(x)\mu^2(x)\|v\|^2$$

und daher gewinnen wir eine Darstellung der Koeffizienten als

$$\alpha(x) = \frac{d\mu_x(w)}{\mu(x)} \quad \text{und} \quad \beta(x) = \frac{d\mu_x(v)}{\mu(x)}, \tag{12}$$

wobei man die Formel für β auch direkt durch Vertauschen $v \leftrightarrow w$ gewinnen darf.

Wir betrachten nun den Kehrwert des Konformfaktors,

$$\rho\colon U \to \mathbb{R}, \quad \rho(x) := \frac{1}{\mu(x)} \quad \text{mit} \quad d\rho_x(v) = -\frac{1}{\mu^2(x)} d\mu_x(v).$$

Dies benutzend, setzen wir (12) in $\frac{1}{\mu}\cdot$(11) ein:

$$d\rho_x(w)\, df_x(v) + d\rho_x(v)\, df_x(w) + \rho(x)\, d^2 f_x(v,w) = 0 \qquad \text{für alle } v \perp w \in \mathbb{R}^n, \;\; x \in U.$$

Von der erhaltenen Gleichung bilden wir die Richtungsableitung in beliebiger Richtung u

$$\begin{aligned} d^2\rho_x(u,w)\, df_x(v) + d\rho_x(w)\, d^2 f_x(u,v) + d^2\rho_x(u,v)\, df_x(w) \\ + d\rho_x(v)\, d^2 f_x(u,w) + d\rho_x(u)\, d^2 f_x(v,w) + \rho(x)\, d^3 f_x(u,v,w) = 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Symmetrie der Summanden. Nehmen wir dazu an, dass u, v, w paarweise orthogonale Vektoren sind. Dann gilt die letzte Gleichung sowohl für u, v, w wie für v, u, w, d.h. mit u und v vertauscht. Wir bilden die Differenz dieser Gleichungen. Die Differenzen für den zweiten, dritten und sechsten Summanden verschwinden, weil diese Summanden in u, v symmetrisch sind. Das gleiche gilt für die Summe aus dem vierten und fünften Term. Also verbleibt nur die Differenz für den ersten Summanden,

$$d^2\rho_x(u,w)\, df_x(v) = d^2\rho_x(v,w)\, df_x(u).$$

Aber für $u \perp v$ sind die beiden Vektoren $df_x(u) \perp df_x(v)$ linear unabhängig, also muss $d^2\rho_x(v,w)$ für jedes Paar orthogonaler Vektoren $v \perp w$ verschwinden. Beachten Sie, dass wir $n \geq 3$ tatsächlich benutzt haben, um bis hierher zu gelangen (wieso?).

Hieraus folgt unter Benutzung von Aufgabe 1.1.1, dass $d^2\rho_x(v,w)$ für jeden Punkt x ein Vielfaches des Standardskalarproduktes ist, es existiert also eine Funktion $\sigma\colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$d^2\rho_x(v,w) = \sigma(x)\langle v, w\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n \text{ und } x \in U.$$

Wir behaupten, dass σ konstant ist. Um das zu sehen, betrachten wir erneut eine Richtungsableitung in eine beliebige Richtung $u \in \mathbb{R}^n$:

$$d^3\rho_x(u,v,w) = d\sigma_x(u)\langle v, w\rangle$$

Um diese Ableitung bilden zu dürfen, haben wir f viermal differenzierbar vorausgesetzt. Die linke Seite ist symmetrisch in u, v, also auch die rechte. Deshalb folgt für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\big\langle d\sigma_x(u)\, v - d\sigma_x(v)\, u,\, w \big\rangle = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \qquad \Rightarrow \qquad d\sigma_x(u)\, v = d\sigma_x(v)\, u.$$

Weil zu jedem u ein linear unabhängiges v gewählt werden kann, muss $d\sigma_x(u)$ für alle u verschwinden. Daher ist $d\sigma \equiv 0$ und, weil U zusammenhängend ist, folgt σ konstant.

Die Gleichung $d^2\rho_x(v,w) = \sigma\langle v,w\rangle$ können wir aufintegrieren zu

$$\rho(x) = a\|x - x_0\|^2 + b, \tag{13}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Integrationskonstanten sind und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, aber nicht unbedingt $x_0 \in U$. (Übung: Bestätigen Sie dies durch Nachrechnen).

Im Fall $a = 0$ sind ρ und daher der Konformfaktor μ konstant. Die Richtungsableitung von $\langle df_x(v), df_x(w)\rangle = \mu\langle v,w\rangle$ ergibt wieder (10), diesmal aber für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Also verschwindet k sogar für alle u, v, w und das bedeutet $d^2f = 0$. Dies wiederum impliziert f ist affin linear, und insbesondere ist f wie behauptet bis auf Translation eine Ähnlichkeit.

Im Fall $b = 0$ bedeutet $\rho \neq 0$, dass x_0 nicht in U liegt; insbesondere ist dieser Fall für den Ganzraumfall $U = \mathbb{R}^n$ ausgeschlossen. Es sei inv die Inversion an der Einheitssphäre mit Mittelpunkt x_0. Dann ist $\mathrm{inv} \circ f$ ebenfalls konform mit reziprokem Konformfaktor

$$\rho_{\mathrm{inv}\circ f}(x) = \rho_{\mathrm{inv}}\big(f(x)\big)\,\rho_f(x).$$

Aber für die Inversion gilt $\rho_{\mathrm{inv}}(y) = \|x_0 - y\|^2$ und daher ist $\rho_{\mathrm{inv}\circ f}$ konstant. Das bedeutet, bis auf Translation ist $\mathrm{inv} \circ f$ eine Ähnlichkeit, eingeschränkt auf U. In unseren beiden Fällen haben wir damit insgesamt die Behauptung gezeigt, und zwar sowohl für $U = \mathbb{R}^n$ wie für $U \neq \mathbb{R}^n$.

Abschließend zeigen wir, dass einer unserer beiden Fälle tatsächlich eintreten muss, so dass $a \neq 0$ und $b \neq 0$ nicht zugleich möglich sind. Sei dazu $g\colon f(U) \to U$ die Inverse von f. Da auch g konform ist, gilt $1 = \mu_{g\circ f} = \mu_g\big(f(x)\big)\,\mu_f(x)$ für jedes $x \in U$. Also müssen auch die Kehrwerte der Konformfaktoren von f und g das Produkt 1 haben, d.h. unter Verwendung einer Darstellung (13) müssen Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $x \in U$ gilt

$$\big(a\|x - x_0\|^2 + b\big)\big(c\|f(x) - f(x_0)\|^2 + d\big) = 1. \tag{14}$$

Auf Sphären um x_0 ist der erste Faktor konstant, also auch der zweite – das Bild ist also eine Sphäre um $f(x_0)$. Aus der Konformität folgt aber: Die auf diesen Sphären radialen Richtungen werden auf radiale Richtungen abgebildet. Der Schnitt von U mit einer Geraden durch x_0 muss also auf eine Gerade durch $f(x_0)$ abgebildet werden. Sei $x_0 + tu$ die Parametrisierung einer Strecke in U durch x_0, wobei $\|u\| = 1$. Die Bildgerade läuft dann in Richtung eines Einheitsvektors v und definiert eine Funktion φ mit

$$f(x_0 + tu) = f(x_0) + \varphi(t)v \quad \in V,$$

so dass $df(u) = \varphi' v$. Nach Konformität von f gilt

$$\varphi' = \mu = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{at^2 + b},$$

andererseits aber auch gemäß (14)

$$(at^2 + b)(c\varphi^2 + d) = 1.$$

Diese beiden Gleichungen können zusammen nur gelten, wenn a oder b verschwinden (zeige dies!).

□

1.6. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 1 – Ähnlichkeiten:

a) Sei $b(v,w)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Zeige: Gilt $b(v,w)=0$ für alle v,w mit $\langle v,w\rangle = 0$, so existiert $\sigma\in\mathbb{R}$ mit $b(v,w)=\sigma\langle v,w\rangle$.
Tipp: Werte b auf Basisvektoren aus, $b(e_i,e_j)$ bzw. $b(e_i+e_j,e_i-e_j)$.

b) Folgere: Eine lineare Abbildung $A\in\mathsf{GL}(n)$ ist genau dann eine Ähnlichkeit, wenn sie aufeinander senkrechte Vektoren $v\perp w$ in senkrechte Vektoren $Av\perp Aw$ abbildet.

Aufgabe 2 – Singularität in ∞:

a) Welche Ihnen bekannte holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ haben in ∞ eine wesentliche Singularität?

b) Stellen Sie eine Vermutung in Bezug auf periodische Funktionen auf und beweisen Sie sie.

Aufgabe 3 – Konformität:

Zeige dass Konformität unter Verknüpfung erhalten bleibt. Was ist der Konformfaktor von $g\circ f$?

Aufgabe 4 – Inversion:

a) Zeige, dass die *Inversion an der Einheitssphäre*

$$\mathrm{inv}\colon \mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\qquad x\mapsto\frac{x}{\|x\|^2}$$

konform ist. Ist sie orientierungstreu? Wie lautet eine Inversion an einer Sphäre vom Radius R?

b) Deute im Falle $n=2$ auch die Abbildungen $z\mapsto 1/z$ und $z\mapsto 1/\overline{z}$ geometrisch und entscheide danach oder nach Formel, ob sie Inversionen am Kreis darstellen.

Aufgabe 5 – Winkel von Kurven:

Sei f holomorph mit einer k-fachen p Stelle in a, d.h. es gilt $f(z)=p+a_k(z-a)^k+a_{k+1}(z-a)^{k+1}+\ldots$ in einer Umgebung von $z=a$. Ferner seien γ,η Kurven durch a mit Winkel $\angle(\gamma'(0),\eta'(0))$. Definieren Sie auch für diesen Fall den Winkel der Bildkurven $f\circ\gamma$ mit $f\circ\eta$ in p und drücken Sie ihn durch $\angle(\gamma'(0),\eta'(0))$ aus.

Aufgabe 6 – Wirtinger-Ableitungen:

Definiere Differentialoperatoren ∂_z und $\partial_{\overline{z}}$ (sogenannte *Wirtinger-Ableitungen*), so dass die Holomorphie von f durch $\partial_{\overline{z}} f = 0$ charakterisiert wird und Antiholomorphie durch $\partial_z f = 0$. Warum gelten die üblichen Differentialtionsregeln auch für ∂_z und $\partial_{\overline{z}}$?

Aufgabe 7 – Anti-Holomorphie:

a) Zeige: $f(\overline{z})$ ist antiholomorph genau dann, wenn $f(z)$ holomorph ist. Folgere:
   - Polynome und Potenzreihen in $\overline{z}$ sind antiholomorph.
   - Ist f holomorph, so ist $\overline{f}$ antiholomorph.

b) Man kann jede reell differenzierbare Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ in $f(z) = h(z) + a(z)$ zerlegen mit $h, a \in C^1(U, \mathbb{C})$ und h holomorph, a antiholomorph.

Aufgabe 8 – Schnittwinkel von Kurven:

Sei f holomorph mit einer k-fachen p Stelle in 0, d.h. es gilt $f(z) = p + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots$ in einer Umgebung von $z = 0$. Ferner seien γ, η Kurven durch 0 mit Winkel $\angle(\gamma'(0), \eta'(0))$. Definieren Sie auch für diesen Fall diesem Fall den Winkel der Bildkurven $f \circ \gamma$ mit $f \circ \eta$ in p und drücken Sie ihn durch $\angle(\gamma'(0), \eta'(0))$ aus.

Aufgabe 9 – Mercator-Projektion:

Die Mercator-Projektion bildet eine geeigneten offene Menge der Sphäre auf $\mathbb{R}^2$ winkeltreu ab, so dass Längengerade auf zur y-Achse parallele Geraden abgebildet werden. Zeige: Eine solche Abbildung existiert. Bleiben die Bilder von Kurven, die gegen die Pole laufen, beschränkt?

Aufgabe 10 – Konforme Invarianz der Potentialgleichung:

Die Potential-Gleichung $\Delta f = 0$ bleibt invariant unter konformen Abbildungen.

Aufgabe 11 – Zusammenhang:

a) Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.

b) Das stetige Bild einer einfach zusammenhängenden Menge ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 12 – Wiederholungsfragen zum ersten Teil der Vorlesung:

a) Definiere konforme Abbildungen und gib interessante Beispiele in Dimension 2 und $n > 2$ an.

b) Gib die folgenden Automorphismengruppen an (mit Begründung): $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$, $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$, $\operatorname{Aut} D$.

c) Gib drei nicht konform äquivalente Gebiete in $\mathbb{C}$ an.

`3. Vorlesung, Donnerstag 30.10.08` ______________________________

2. Riemannscher Abbildungssatz

2.1. **Möbiustransformationen.** Wir bezeichnen mit $\hat{\mathbb{C}}$ die erweiterte komplexe Ebene $\mathbb{C} \cup \infty$. Um $\operatorname{Aut} \hat{\mathbb{C}}$ einführen zu können, müssen wir zuerst Holomorphie definieren, wenn Urbild oder Bild den Punkt ∞ enthalten. Wir geben dazu zwei Definitionen, die man so verstehen kann, dass jeweils mittels der Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ das Verhalten in ∞ auf den Punkt 0 zurückgespielt wird. Später werden wir eine Interpretation durch die Riemannsche Zahlenkugel angeben.

Eine *meromorphe Funktion* $f\colon U \to \mathbb{C}$ für $U \subset \mathbb{C}$ offen ist definitionsgemäß holomorph auf $U \setminus S$, wobei $S \subset U$ eine diskrete Menge ist, so dass f in jedem Punkt von S einen Pol besitzt. Für jeden Pol $a \in S$ divergiert f bestimmt gegen ∞, und entsprechend schreiben wir $f(a) := \infty$. Beachten Sie, dass für wesentliche Singularitäten nach dem Satz von Casorati-Weierstraß kein Grenzwert existiert. Daher ist es für die Meromorphiedefinition äquivalent zu verlangen, dass $1/f$ in S durch 0 stetig (also holomorph) fortgesetzt wird.

Um im Urbild den Wert ∞ zu erlauben, sagen wir $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ heißt *holomorph* bzw. *meromorph*, wenn sowohl f eingeschränkt auf $\mathbb{C}$ wie $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ auf $\mathbb{C}^*$ holomorph bzw. meromorph ist. Die zweite Forderung bedeutet zu verlangen, dass $f(\frac{1}{z})$ eine hebbare Singularität oder einen Pol in $z = 0$ hat; d.h. $f(\frac{1}{z})$ darf keine wesentliche Singularität haben. (*Aufgabe 1*: Welche Ihnen bekannte holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ haben in ∞ eine wesentliche Singularität?). Mit derselben Definition kann man als Urbild auch $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ zulassen, wobei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ist.

Definition. Eine *Möbiustransformation* oder *gebrochen lineare Transformation [fractional linear transformation]* ist eine Abbildung

$$f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \qquad f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit} \qquad ad - bc \neq 0,$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Falls f affin-linear ist, setzen wir $f(\infty) = \infty$, anderenfalls $f(\infty) := \frac{a}{c}$ und $f\big(-\frac{d}{c}\big) := \infty$.

Die Bedingung $ad \neq bc$ schließt aus, dass der Nenner Vielfaches des Zählers ist, was f konstant werden lässt; insbesondere garantiert sie, dass der Nenner nicht identisch verschwindet.

Beispiele. Translationen $z \mapsto z+b$, Drehstreckungen $z \mapsto az$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ und die *gespiegelte Inversion (an der Einheitssphäre)* $\overline{\operatorname{inv}}(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ sind Möbiustransformationen.

Aus der Charakterisierung von $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ gewinnen wir nun eine Charakterisierung von $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$:

Satz 5. $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ *ist die Gruppe der Möbiustransformationen.*

Beweis. Sei $f \in \operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$. Im Falle $f(\infty) = \infty$ ist $f|_{\mathbb{C}} \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}$ und nach Satz 3 ist f affin-linear, also eine Möbiustransformation mit $c = 0$, $d = 1$.

Anderenfalls gilt $f(\infty) =: z_0 \in \mathbb{C}$. Wir setzen dann $g(z) := \frac{1}{z-z_0}$ und erhalten $h := g \circ f$ mit $h(\infty) = g(z_0) = \infty$. Also ist $h \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}$ und daher $h = cz + d$ affin-linear mit $c \neq 0$ und wegen $g^{-1}(w) = \frac{1}{w} + z_0$ folgt wie gewünscht

$$f(z) = g^{-1}\big(h(z)\big) = \frac{1}{cz+d} + z_0 = \frac{z_0cz + (1+z_0d)}{cz+d}$$

mit $z_0c\,d - (1+z_0d)c = -c \neq 0$. Damit ist f Möbiustransformation.

Umgekehrt ist jede Möbiustransformation f in $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ enthalten. Aus den üblichen Differentiationsregeln folgt, dass f komplex differenzierbar ist, und durch Partialbruchzerlegung sieht man, dass f meromorph auf $\mathbb{C}$ ist. Weiterhin ist f in $z = \infty$ holomorph, denn $f(\frac{1}{w}) = \frac{a+bw}{c+dw}$ für $w \neq 0$ wird genau durch $f(\infty) = \frac{a}{c}$ stetig zu einer in $w = 0$ holomorphen Funktion ergänzt. Schließlich folgt die Bijektivität aus (16) weiter unten. □

Wir schreiben die vier Koeffizienten a, b, c, d in eine komplexe 2×2-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist die Determinante ungleich 0 und die Menge dieser Matrizen bildet die Gruppe $\mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$. Die Matrixdarstellung wird dadurch nützlich, dass die Hintereinanderausführung linearer Transformationen gerade einer Matrizenmultiplikation entspricht:

Satz 6. *Die Abbildung*

$$\Phi\colon \mathsf{GL}(2,\mathbb{C}) \to \operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}, \qquad T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto Tz := \frac{az+b}{cz+d}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Für zwei Matrizen aus $S, T \in \mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$, dargestellt als $S = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ rechnen die Homomorphismen-Eigenschaft $\Phi(S) \circ \Phi(T) = \Phi(ST)$ nach:

$$S(Tz) = \frac{\alpha\frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma\frac{az+b}{cz+d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)} = (ST)(z). \tag{15}$$

□

Aus (15) folgt, dass $\Phi(T)$ bijektiv ist, denn die inverse Möbiustransformation $\big(\Phi(T)\big)^{-1} = \Phi(T^{-1})$ wird gegeben durch

$$(T^{-1})w = \left(\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) w = \frac{dw-b}{-cw+a}. \tag{16}$$

Der Homomorphismus Φ ist nicht injektiv: Der Kern von Φ ist die Untergruppe

$$H := \Phi^{-1}(\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}) = \{\alpha E_2 : \alpha \in \mathbb{C}^*\},$$

wobei E_2 für die Einheitsmatrix steht. Sämtliche Vielfache einer Matrix ergeben also dieselbe Möbiustransformation, $\Phi(T) = \Phi(\alpha T)$. Wir definieren nun die *projektive lineare Gruppe* als Quotientengruppe

$$\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C}) := \mathsf{GL}(2,\mathbb{C})/H.$$

Als Menge ist $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ gerade der Quotientenraum nach der Äquivalenzrelation $A \sim B :\Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{C}^*,\ \alpha A = B$. Dann ist $\Phi\colon \mathsf{PSL}(2,\mathbb{C}) \to \operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ wohldefiniert und Isomorphismus.

Um den Raum $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ besser zu verstehen, betrachten wir zunächst eine andere Untergruppe von $\mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$: die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathsf{SL}(2,\mathbb{C}) := \{A \in \mathsf{GL}(2,\mathbb{C}) : \det A = 1\}.$$

Die beiden Matrizen $\pm A \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ repräsentieren dieselbe Nebenklasse in $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$. Daher können wir $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ auch als Quotientengruppe der speziellen linearen Gruppe verstehen:

$$\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})/\pm\,.$$

Bemerkung. Mulitpliziert man eine Matrix $A \in \mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$ mit einem Faktor $1/\sqrt{\det A}$ durch, so bleibt die Möbiustransformation $\Phi(A)$ unverändert. Dabei führt die Wurzel mit unbestimmtem Vorzeichen, die man als Umkehrrelation des Quadrierens erhält, zu einer wohlbestimmten Nebenklasse $\frac{1}{\sqrt{\det A}}A \in \mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$.

2.2. **Abbildungseigenschaften von Möbiustransformationen.** Wir befassen uns zuerst mit der Geometrie von Möbiustransformationen.

Satz 7. (*i*) *Die Gruppe der Möbiustransformationen* $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ *wird erzeugt von Translationen, Drehstreckungen und gespiegelten Inversionen.*
(*ii*) *Jede Möbiustransformation bildet Geraden und Kreise auf Geraden oder Kreise ab.*

Beweis. (*i*) Sei $Tz = \frac{az+b}{cz+d} \in \operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$. Im Falle $c = 0$ ist T affin-linear und die Aussage klar. Anderenfalls können wir schreiben:

$$z \overset{\text{Transl.}}{\longmapsto} z + \frac{d}{c} \overset{\text{Inv.}}{\longmapsto} \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} \overset{\text{Drehstr.}}{\longmapsto} \frac{bc-ad}{c^2}\left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1}$$
$$\overset{\text{Transl.}}{\longmapsto} \frac{bc-ad}{c^2}\left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c^2 z + cd} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad+acz+ad}{c^2 z + cd} = \frac{b+az}{cz+d}$$

(*ii*) Es reicht zu zeigen, dass die angegebene Eigenschaft für die Erzeugenden aus (*i*) gilt. Für Translationen und Drehstreckungen ist das klar.

Um den Fall von Inversionen zu behandeln, behaupten wir zuerst, dass Geraden und Kreise genau diejenigen Punktmengen in $\mathbb{C}$ sind, die Gleichungen der Form

$$s|z|^2 + pz + \overline{pz} + t = 0, \qquad \text{mit} \quad s,t \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad |p|^2 > st \tag{17}$$

erfüllen. Tatsächlich erfüllt ein Kreis um $q \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ die Gleichung $|z-q|^2 = r^2$, oder äquivalent, nach Multiplikation mit $s \neq 0$:

$$0 = s\big(|z-q|^2 - r^2\big) = s|z|^2 - s\overline{q}z - sq\overline{z} + s\big(|q|^2 - r^2\big)$$

Im Falle $s \neq 0$ ist also jede Lösungsmenge von (17) ein Kreis. Andererseits nimmt (17) im Falle $s = 0$ aber die Form einer Geradengleichung an, denn

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}, z \right\rangle + t = \big(p_1 z_1 - p_2 z_2\big) + t = \mathrm{Re}(pz) + t = \frac{p}{2}z + \frac{\overline{p}}{2}\overline{z} + t.$$

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass gespiegelte Inversionen die Lösungsmengen von (17) auf Lösungsmengen von Gleichungen desselben Typs abbilden. Setzt man aber $z = \frac{1}{w}$ in (17) ein und multipliziert mit $|w|^2$, so erhält man die Gleichung $s + p\overline{w} + \overline{p}w + t|w|^2 = 0$, also wieder eine Gleichung derselben Form. $\square$

`4. Vorlesung, Donnerstag 6.11.08`

Eine wichtige Größe für Möbiustransformationen ist das *Doppelverhältnis [cross ratio]* von vier verschiedenen Punkten aus $\hat{\mathbb{C}}$,

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4}\,\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \quad \in \hat{\mathbb{C}};$$

dabei soll das Doppelverhältnis als Grenzwert definiert sein, wenn einer der Punkte ∞ ist (*Aufgabe* 1. Präzisiere das!).

Beispiel. $DV(1, i, -1, -i) = \frac{1-i}{1+i}\,\frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(1-i)^4}{(1-i^2)^2} = \frac{-2^2}{2^2} = -1$

Das Doppelverhältnis hat viele interessante geometrische Eigenschaften, siehe [B, Teil I]. Wir zeigen hier, dass es eine Invariante von Möbiustransformationen darstellt:

Satz 8. *(i) Für jedes $T \in \mathrm{Aut}\,\hat{\mathbb{C}}$ und jedes Quadrupel von paarweise veschiedenen Punkten aus $\hat{\mathbb{C}}$ gilt*

$$\mathrm{DV}\,\big(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4\big) = \mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

(ii) Sind (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbiustransformation $T \in \mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ mit $Tz_k = w_k$ für $k = 1, 2, 3$.

Es sei bemerkt, dass sowohl $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ wie der Raum der Tripel komplex drei-dimensional sind.

Beweis. (*ii*) Die Abbildung

$$R\colon z \mapsto \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\,\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \tag{18}$$

ist offenbar eine Möbiustransformation. Sie bildet das Tripel (z_1, z_2, z_3) auf das spezielle Tripel $(0, 1, \infty)$ ab. Sei entsprechend S eine Möbiustransformation, die (w_1, w_2, w_3) auf $(0, 1, \infty)$ abbildet. Dann ist $S^{-1} \circ R$ eine Möbiustransformation mit der gewünschten Eigenschaft.

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Wir zeigen zuerst, dass jede Möbiustransformation T, abgesehen von der Identität, genau einen oder zwei Fixpunkte besitzt ($Tz = z$):
• Im Spezialfall $Tz = z + b$ ist nur ∞ Fixpunkt, während
• $Tz = az + b$ mit $a \neq 1$ die Fixpunkte ∞ und $b/(1 - a)$ besitzt.
• Im verbleibenden Fall $Tz = (az+b)/(cz+d)$ mit $c \neq 0$ erfüllen Fixpunkte die quadratische Gleichung $cz^2 + dz = az + b$, so dass es ebenfalls ein oder zwei gibt.

Hat man nun zwei Möbiustransformation S, T mit $Sz_k = Tz_k$ für ein Tripel z_1, z_2, z_3, so besitzt die Möbiustransformation $T^{-1} \circ S$ drei Fixpunkte und ist damit die Identität, d.h. $Sz = Tz$ für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$ (und damit auch $S = T$ als Elemente von $\mathsf{PSL}(2, \mathbb{C})$).

(*i*) Ist $T \in \operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$, so ist T nach Satz 5 eine Möbiustransformation. Damit ist die Abbildung $S\colon z \mapsto \mathrm{DV}\big(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3\big)$ die Komposition der beiden Möbiustransformationen $z \mapsto Tz$ und $w \mapsto \mathrm{DV}(w, Tz_1, Tz_2, Tz_3)$, also selbst wieder Möbiustransformation. Weiter gilt

$$Sz_1 = \mathrm{DV}\big(Tz_1, Tz_1, Tz_2, Tz_3\big) = 0, \quad Sz_2 = 1, \quad Sz_3 = \infty,$$

Aber ebenso gilt für R wie in (18), dass $Rz_1 = 0$, $Rz_2 = 1$, $Rz_3 = \infty$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage folgt daher wie gewünscht

$$\mathrm{DV}\big(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3\big) = Sz = Rz = \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$$

für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$. □

Man bezeichnet die Geometrie von $\hat{\mathbb{C}}$, die unter der Gruppe der konformen Transformationen erhalten bleibt, als *konforme Geometrie*. Beispielsweise lassen sich Geraden und Kreise in der konformen Geometrie nicht mehr unterscheiden. Tripel paarweise verschiedener Punkte sind ebenfalls ununterscheidbar. Dagegen gibt es genau $\hat{\mathbb{C}}$ konform verschiedene Wahlen von Quadrupeln von Punkten gibt, denn das Doppelverhältnis ist ihre *konforme Invariante*.

Diese Auffassung einer *Geometrie* geht auf Felix Kleins Erlanger Programm von 1872 zurück (siehe z.B. Wikipedia-Artikel dazu). Alle unter einer gegebenen Transformationsgruppe erhaltenen Eigenschaften definieren eine *Geometrie*; man studiert sie, indem man

ihre Invarianten angibt. Andere Gruppen und Geometrien wären beispielsweise:
• Affinitäten in der lineare Algebra,
• die Gruppe der Bewegungen in der euklidischen Geometrie,
• Homöomorphismen in der Topologie,
• Lorentz-Transformationen in der speziellen Relativitätstheorie.

2.3. **Die Riemannsche Zahlenkugel.** Wir kommen nun zu einem geometrischen Bild von $\hat{\mathbb{C}}$, das $\hat{\mathbb{C}}$ als topologischen oder metrischen Raum charakterisiert. Dieser Raum ist die Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Der Abstand des umgebenden Raumes $\mathbb{R}^3$, also $d(p,q) := |p-q|_{\mathbb{R}^3}$ für $p,q \in \mathbb{S}^2$, macht $\mathbb{S}^2$ zu einem metrischen Raum.

Betrachten wir nun dazu die *stereographische Projektion* bezüglich des Nordpoles,

$$\mathrm{st}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2, \qquad \mathrm{st}(z) := \begin{cases} \frac{1}{|z|^2+1}\big(2\operatorname{Re} z, 2\operatorname{Im} z, |z|^2-1\big) & z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,1) & z = \infty. \end{cases}$$

Dann ist st bijektiv mit Umkehrabbildung $\mathrm{st}^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x+iy)$ für $z \neq \infty$ und $\mathrm{st}^{-1}(0,0,1) = \infty$.

Offene Mengen der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^2$ sind definitionsgemäß die Schnitte offener Mengen von $\mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{S}^2$. Nun definieren wir offene Mengen von $\hat{\mathbb{C}}$ als Urbilder offener Mengen von $\mathbb{S}^2$ unter st, d.h. man nimmt gerade soviele offene Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$, dass st stetig wird. Dann ist z.B. jede offene Umgebung von ∞ von der Form $\infty \cup \mathbb{C} \setminus K$, wobei K kompakt ist. Man nennt den metrischen Raum $\hat{\mathbb{C}}$ auch die *Riemannsche Zahlenkugel.*

Die stereographische Projektion hat noch weitere Eigenschaften, die wir hier nicht beweisen:
• Sie ist winkelerhaltend (konform), erhält also insbesondere rechte Winkel.
• Die Urbilder von beliebigen Kreisen in der Sphäre sind Ursprungsgeraden und gewisse Kreise in $\mathbb{R}^2$ (welche?). Dabei sind Kreise in $\mathbb{S}^2$ als Schnitte beliebiger Ebenen mit $\mathbb{S}^2$ definiert (für Ursprungsebenen ist der Schnitt ein Großkreis).

Daher kann man die Gruppe $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ auch als die Menge der konformen und orientierungserhaltenden Selbstabbildungen von $\mathbb{S}^2$ auffassen. Jede konforme orientierungstreue Selbstabbildung von $\mathbb{S}^2$ definiert also eine Möbiustransformation, insbesondere ist die (reell-)dreidimensionale Drehgruppe $\mathsf{SO}(3)$ eine Untergruppe der (reell-)sechsdimensionalen Gruppe $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$. Die meisten Möbiustransformationen gehören aber nicht zu einer Drehung, z.B. erzeugen Dilatationen von $\mathbb{C}$ interessante konforme Selbstabbildungen von $\mathbb{S}^2$.

Bemerkung. Wir haben gesehen, dass man auf der Riemannschen Zahlenkugel über holomorphe Funktionen sprechen kann. Es gibt weitere kompakte Flächen, die entsprechende komplexe Strukturen haben, die sogenannten *Riemannschen Flächen.* Wie Flächen im allgemeinen sind auch Riemannsche Flächen durch ihr *Geschlecht* $g \in \mathbb{N}_0$ klassifiziert. Jedoch sind sie für gegebenes Geschlecht nicht mehr eindeutig, sondern es gibt einen reell $(6g-6)$-dimensionalen Raum davon, den sogenannten *Teichmüller-Raum.*

`5. Vorlesung, Donnerstag 13.11.08`

2.4. **Schwarzsches Lemma und Automorphismen des Einheitskreises.** Es gibt viele Abbildungen von der Kreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in sich selbst, z.B. jede Abbildung $z \mapsto az^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $|a| \leq 1$. Den folgenden Satz, bei dem wir als Bild $\overline{D}$ zulassen, hatten wir bereits in den Übungen von Funktionentheorie I bewiesen.

Satz 9. *Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph mit*

$$|f(z)| \leq 1 \quad \textit{für } z \in D \qquad \textit{und} \qquad f(0) = 0.$$

(i) Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.
(ii) Gilt zusätzlich $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \neq 0$, so ist f eine Drehung, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass $f(w) = cw$ für alle $w \in D$.

Beweis. (i) Wir ergänzen den Differenzenquotienten $\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)}{z}$ stetig, also holomorph, durch seinen Grenzwert:

$$\varphi\colon D \to \mathbb{C}, \qquad \varphi(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} f(z) & \text{für } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{1-\varepsilon} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| = 1-\varepsilon.$$

Wegen des Maximumprinzips gilt dieselbe Ungleichung sogar für alle z mit $|z| \leq 1-\varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt, wie behauptet,

$$z \in D \qquad \Rightarrow \qquad |\varphi(z)| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |f(z)| \leq |z|. \tag{19}$$

(ii) In diesem Fall nimmt φ sein Maximum $|\varphi(z)| = 1$ in einem inneren Punkt z an. Nach dem Maximumprinzip ist φ konstant, $\varphi(z) \equiv c$ mit $|c| = 1$. □

Jede Möbiustransformation bildet den Einheitskreis auf einen Kreis oder eine Gerade ab. Das Bild ist der Einheitskreis in folgendem Falle:

Lemma 10. *Sei $a \in D$. Die Möbiustransformation*

$$\omega_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

bildet $\overline{D}$ (biholomorph) nach $\overline{D}$ ab, und zwar jeweils ∂D und D in sich selbst.

Für $a = 0$ ist ω_a die Identität. Im allgemeinen bildet $\omega_a\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ den Punkt 0 auf $-a$ ab und $a/|a|^2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ auf unendlich.

Beweis. Wegen $|\overline{a}z| \leq |a||z| < 1$ verschwindet der Nenner von ω_a für kein $z \in \overline{D}$. Nach den üblichen Differentiationsregeln ist ω_a daher holomorph auf $\overline{D}$.

Weiterhin folgt aus der Produktregel $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, dass

$$|\omega_a(z)|^2 = \omega_a(z)\overline{\omega_a(z)} = \frac{(a-z)(\overline{a}-\overline{z})}{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})} = \frac{|a|^2+|z|^2-2\operatorname{Re}(\overline{a}z)}{1+|a|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(\overline{a}z)}. \tag{20}$$

Ist $|z| = 1$, so stimmen Zähler und Nenner überein, und daher gilt $|\omega_a(z)| = 1$; es gilt also tatsächlich $\omega_a(\partial D) \subset \partial D$. Andererseits gilt

$$z \in D \quad \Rightarrow \quad 0 < (1-|a|^2)(1-|z|^2) \quad \Rightarrow \quad |a|^2+|z|^2 < 1+|a|^2|z|^2.$$

Zähler wie Nenner von (20) sind reell und nicht-negativ, und nach der letzten Abschätzung ist der Zähler kleiner als der Nenner. Daraus folgt $\omega_a(z) \in D$. □

Bemerkung. Die Möbiustransformation ω_a entspricht einer Matrix T_a mit

$$T_a := \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -\overline{a} & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad T_a^{-1} = \frac{1}{1-|a|^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ \overline{a} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-|a|^2}\, T_{-a}.$$

Da aber Matrizen und ihre skalaren Vielfachen dieselbe Möbiustransformation definieren, bestimmt dies ω_{-a} als Inverse zu ω_a.

Nach $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$ und $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ können wir nun eine dritte Automorphismengruppe bestimmen:

Satz 11. *Die Automorphismengruppe des Einheitskreises D lautet*

$$\operatorname{Aut} D := \Big\{\omega_{a,\vartheta}(z) := e^{i\vartheta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\ \vartheta \in \mathbb{R},\ a \in D\Big\}.$$

Die Gruppe $\operatorname{Aut} D$ stellt also eine (reell) drei-dimensionale Untergruppe der sechs-dimensionalen Gruppe $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ dar.

Beweis. Eine Drehung $e^{i\vartheta}$ lässt die Kreisscheibe D invariant. Zusammen mit dem Lemma folgt $\omega_{a,\vartheta} \in \operatorname{Aut} D$.

Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung. Sei $f \in \operatorname{Aut} D$, zunächst mit $f(0) = 0$. Laut Schwarzschem Lemma gilt $|f(z)| \le |z|$ auf D. Andererseits ist auch $f^{-1} \in \operatorname{Aut} D$, und daher wiederum laut Schwarzschem Lemma $|f^{-1}(w)| \le |w|$ auf D. Es folgt

$$|z| = \left|f^{-1}\big(f(z)\big)\right| \le |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in D.$$

Es muss also $|f(z)| = |z|$ auf D gelten, und erneut nach Schwarzschem Lemma ist f eine Drehung um einen Winkel $\vartheta \in \mathbb{R}$, also $f(z) = e^{i\vartheta} z$.

Sei $f \in \operatorname{Aut} D$ nun allgemein. Es sei a das Urbild von 0, also $f(a) = 0 \in D$. Da $\omega_{-a}(0) = a$ gilt, ist $f \circ \omega_{-a} \in \operatorname{Aut} D$ ein Automorphismus, der 0 fixiert. Das vorhergien Ergebnis liefert die gewünschte Darstellung:

$$(f \circ \omega_{-a})(z) = e^{i\vartheta} z \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = (f \circ \omega_{-a})(\omega_a(z)) = e^{i\vartheta}\omega_a(z)$$

□

Für schöne Anwendungen auf die hyperbolische Ebene verweisen wir auf [FL].

2.5. **Satz von Rouché.** Mit dem Satz von Rouché gewinnen wir eine Integraldarstellung als Antwort auf die Frage, wie oft eine holomorphe Funktion einen Wert annimmt.

Eine Funktion f habe in b eine Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. In einer Umgebung von b gilt also die Potenzreihendarstellung $f(z) = a_k(z-b)^k + \dots$ mit $a_k \ne 0$ und daher

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k a_k (z-b)^{k-1} + \dots}{a_k (z-b)^k + \dots} = \frac{k}{z-b}\,\frac{1 + O(z-b)}{1+O(z-b)} \\ \Rightarrow \qquad \operatorname{res}_b \frac{f'}{f} &= \lim_{z\to b}\,(z-b)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \to b} k \frac{1+O(z-b)}{1+O(z-b)} = k \end{aligned} \tag{21}$$

Entsprechend erhalten wir für f mit einem Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ in d unter Verwendung der Laurent-Entwicklung $f(z) = a_m(z-d)^{-m} + a_{m-1}(z-d)^{1-m} + \dots$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m a_m (z-d)^{-m-1} + \dots}{a_m(z-d)^{-m} + \dots} = -\frac{m}{z-d}\,\frac{1+O(z-d)}{1+O(z-d)} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{res}_d \frac{f'}{f} = -m.$$

Aus dem Residuensatz folgt:

Lemma 12. *Sei $f\colon U \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph und nicht konstant mit Nullstellen $b_1, \dots, b_N$ der Ordnung $k_1, \dots, k_N$ und Polstellen $d_1, \dots, d_P$ der Ordnung $m_1, \dots, m_P$. Ist weiter c eine stückweise C^1-Schleife in U, die diese Punkte nicht trifft, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^N n(b_j, c)\,k_j - \sum_{j=1}^P n(d_j, c)\,m_j. \tag{22}$$

Dabei ist $n(z,c)$ die Windungszahl von c um z.

Sind alle Null- und Polstellen im Innengebiet (links) einer eingebetteten Kurve c enthalten, so liefert (22) einen Ausdruck für die Gesamtzahl der Nullstellen minus Polstellen, jeweils gezählt mit Vielfachheit:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{N+P} \operatorname{res}_{b_j}\frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{N} k_j - \sum_{j=1}^{P} m_j. \tag{23}$$

Dabei haben wir $b_{N+j} := d_j$ gesetzt.

Wir werden diese Aussage im vorliegenden Kapitel nur auf holomorphe Funktionen (ohne Polstellen) anwenden. Dann gewinnen wir Aussagen über die Anzahl der Nullstellen:

Satz 13 (Rouché)**.** *Es seien f und g holomorph in U, und das Kompaktum $K \subset\subset U$ werde links durch eine stückweise C^1-Schleife c berandet. Gilt*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial K = \operatorname{Spur} c,$$

so haben f und g gleich viele Nullstellen, wenn wir mit Vielfachheit zählen.

Beweis. Wir betrachten eine Homotopie $h_s := f + s(g-f)$ für $0 \le s \le 1$ von $h_0 = f$ nach $h_1 = g$. Auf $\operatorname{Spur} c$ gilt $|s(g-f)| \le |g-f| < |f|$ und h_s verschwindet dort nicht. Die rechte Seite von (22) ist dann gerade die Summe der mit Vielfachheit gezählten Nullstellenordnungen, $S(s) := \sum k_j(s)$, von h_s. Die Integraldarstellung (22)

$$S(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{h_s'}{h_s}(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f' + s(g'-f')}{f + s(g-f)}(z)\,dz$$

hängt stetig von s ab, hat aber einen ganzzahligen Wert. Also ist $S(s)$ von s unabhängig, insbesondere $S(0) = S(1)$. □

Aus dem Satz von Rouché kann man die Invarianz der Anzahl von Nullstellen einer Funktion unter kleinen Störungen folgern, eine Aussage, die im Reellen offensichtlich falsch ist.

Korollar 14. *Sei G Gebiet, $z_0 \in G$ und $w \in \mathbb{C}$. Ferner sei $(f_k)\colon G \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen mit nicht konstantem Limes f.*
(i) Besitzt f in z_0 eine m-fache w-Stelle, so gibt es eine Umgebung $U \subset G$ von z_0, so dass die Anzahl der w-Stellen von $f_k|_U$ für hinreichend großes k genau m ist.
(ii) Sind alle (f_k) injektiv, so ist auch f injektiv.

Beweis. (i) Es ist keine Einschränkung, $w = 0$ anzunehmen. Wir wählen $\varepsilon > 0$, so dass f auf $K := \overline{B_\varepsilon(z_0)} \subset G$ nur in z_0 verschwindet und setzen $\delta := \min\big\{|f(z)| : z \in \partial B_\varepsilon(z_0)\big\} > 0$.

Es sei N so groß, dass

$$|f_k(z) - f(z)| < \delta \quad \text{für alle } z \in \partial B_\varepsilon(z_0) \text{ und } n \geq N.$$

Dann ist die Voraussetzung des Satz von Rouché für $f_n = f + (f_n - f)$ auf K erfüllt und der Satz gibt die Behauptung.

(ii) Ist f nicht injektiv, so gibt es $z_1 \neq z_2 \in G$ mit $w := f(z_1) = f(z_2)$. Dann gibt es aber nach dem ersten Teil disjunkte Umgebungen U_1 von z_1 und U_2 von z_2, so dass auch f_k jeweils den Wert w in U_1 und U_2 annimmt, für k groß. Widerspruch. □

Machen Sie sich an Hand von Beispielen klar, warum die Aussagen des Korollars im Reellen nicht gelten können.

Bemerkung. Die Bestimmung der Nullstellen von Funktionen ist ein Grundproblem der Mathematik. Betrachten wir von einem Parameter λ abhängige Funktionen f_λ mit Nullstellenmenge $N(\lambda)$. Im reellen Falle $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können Nullstellen "plötzlich" entstehen, denken Sie z.B. an $f_\lambda(x) := x^2 + \lambda$. Im komplexen Falle ist das nicht so, jedenfalls wenn man mit Vielfachheit zählt; allerdings treten Vielfachheiten typischerweise nur für isolierte Werte von λ auf. Man spricht hier auch von *Verzweigungen [bifurcations]* der Nullstellenmenge $N(\lambda)$. Visualisieren Sie die Nullstellen $\big(\lambda, N(\lambda)\big)$ der genannten Funktionen im Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, jeweils für reell gewählte λ.

`6. Vorlesung, Donnerstag 20.11.08` ______________________________

2.6. **Kompaktheitssätze für Funktionen.** Der folgende Satz wird an vielen Stellen der Mathematik eingesetzt, z.B. bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Vielleicht kennen Sie ihn vom Beweis des Existenzsatzes von Peano für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Satz 15 (Arzelà-Ascoli, 1895). *Sei $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $u_k \in C^0(K, \mathbb{R}^m)$ eine Folge, die*
(i) gleichmäßig beschränkt ist, $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{C^0(K)} < \infty$, *und*
(ii) die gleichgradig stetig *[equicontinuous] ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |u_k(x) - u_k(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Dann gibt es eine Teilfolge von u_k, die gleichmäßig auf K konvergiert.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $\delta = \delta(\varepsilon/3) > 0$, das die Bedingung der gleichgradigen Stetigkeit (24) erfüllt.

Weil K kompakt ist, kann man eine Menge endlich vieler Punkte $K_\delta = K_\delta(\varepsilon)$ finden, so dass $K \subset \bigcup_{y \in K_\delta} B_\delta(y)$. Wegen der Beschränktheit von (u_k) finden wir zunächst eine Teilfolge von u_k, die im ersten Punkt von K_δ konvergiert; durch sukzessive Teilfolgenbildung können wir Konvergenz in sämtlichen der endlich vielen Punkte $y \in K_\delta$ erhalten.

Die entstandene Teilfolge bezeichnen wir mit $(u_{k,\varepsilon})_{k\in\mathbb{N}}$. Sie ist eine Cauchy-Folge in jedem $y \in K_\delta$; durch Maximumsbildung erhalten wir daher ein $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$y \in K_\delta \quad \Rightarrow \quad |u_{k,\varepsilon}(y) - u_{\ell,\varepsilon}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } k, \ell \geq N.$$

Sei $x \in K$. Dann gibt es $y \in K_\delta$ mit $|x - y| < \delta$. Wir wenden (24) mit $\varepsilon/3$ zweimal an und benutzen unsere vorherige Abschätzung, um zu sehen, dass die gewählte Teilfolge $u_{k,\varepsilon}$ für alle $k, \ell \geq N(\varepsilon)$, und unabhängig von $x \in K$ erfüllt:

$$|u_{k,\varepsilon}(x) - u_{\ell,\varepsilon}(x)| \leq |u_{k,\varepsilon}(x) - u_{k,\varepsilon}(y)| + |u_{k,\varepsilon}(y) - u_{\ell,\varepsilon}(y)| + |u_{\ell,\varepsilon}(y) - u_{\ell,\varepsilon}(x)| < \varepsilon. \tag{25}$$

Wir betrachten nun eine Folge $\varepsilon = 1/m$ und iterieren dafür den beschriebenen Beweis. Wir wenden ihn also auf die Teilfolge $u_{k,1/m}$ an, welche (25) für $\varepsilon = 1/m$ erfüllt, um daraus eine Teilfolge $u_{k,1/(m+1)}$ zu gewinnen, welche (25) mit $\varepsilon = 1/(m+1)$ erfüllt. Eine aus den Folgen $\{(u_{k,1/m}) : k \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N}\}$ gebildete Diagonalfolge liefert dann die gesuchte, von ε unabhängige, Teilfolge. □

In der Funktionalanalysis gibt man allgemeinere Versionen des Satzes an, etwa: Eine gleichgradig stetige Menge von Funktionen zwischen kompakten metrischen Räumen ist kompakt bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass holomorphe Funktionenfolgen die Annahme der gleichgradigen Stetigkeit stets erfüllen. Dazu geben wir zuerst eine Abschätzung für beliebige Ableitungen einer holomorphen Funktion an. Wir kennen das Resultat bereits für die erste Ableitung: Es war entscheidend zum Beweis des Satzes von Liouville:

Lemma 16 (Cauchysche Ungleichungen)**.** *Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_R}(z_0) \subset U$. Dann erfüllen die Ableitungen die Abschätzung*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\zeta \in \partial B_R(z_0)} |f(\zeta)| \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Beweis. Die Cauchyschen Integralformeln für höhere Ableitungen,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in B_R(z_0),$$

ergeben am Mittelpunkt $z = z_0$ mit Hilfe der Längenabschätzung des Integrals

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{2\pi R}{R^{n+1}} \max_{\zeta\in\partial B_R(z_0)} |f(\zeta)|. \qquad \square$$

Bemerkung. Der gleiche Beweis liefert für beliebiges $z \in B_r(z_0)$ folgende Abschätzung: $\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!R}{(R-r)^n} \max_{\zeta\in\partial B_R(z_0)} |f(\zeta)|$ für alle $r < R$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir werden nun die Anwendung des Satzes von Arzelá-Ascoli auf holomorphe Funktionen gleich in etwas allgemeiner Formulierung geben. Tatsächlich werden wir im Riemannschen Abbildungssatz aus einer Menge (oder *Familie*) von Funktionen eine konvergente Folge heraussuchen. Dazu definieren wir:

Definition (Baire 1908)**.** Eine Familie von Funktionen $\mathcal{F} \subset C^0(U, \mathbb{C})$ heisst *normal*, wenn jede Folge $(f_k) \subset \mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die lokal gleichmäßig gegen ein $f \in C^0(U, \mathbb{C})$ konvergiert.

Im Unterschied zur bekannten Kompaktheitsdefinition wird hier also nicht verlangt, dass die Grenzfunktion selbst in $\mathcal{F}$ liegt. Beachten Sie auch, dass lokal gleichmäßige Konvergenz äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz auf jedem in U enthaltenen Kompaktum ist (*Aufgabe*).

Nun können wir zeigen, dass im Falle holomorpher Funktionen die gleichgradige Stetigkeit automatisch ist:

Satz 17 (Montel, 1912)**.** *Jede Menge lokal beschränkter holomorpher Funktionen $\mathcal{F} \subset C^0(U, \mathbb{C})$ ist normal.*

Beweis. Für beliebiges $w \in U$ gibt es $B_{2r}(w) \subset\subset U$. Wir weisen die gleichgradige Stetigkeit von $\mathcal{F}$ auf der kompakten Umgebung $\overline{B_r}(w)$ von w nach. Die Behauptung folgt dann aus dem Satz von Arzelá-Ascoli.

Für beliebige $z_1, z_2 \in \overline{B_r}(w)$ gilt:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f'(\zeta)\, d\zeta \right| \le |z_1 - z_2| \max_{z\in\overline{B_r}(w)} \left|f'(z)\right|$$

Wegen der lokalen Beschränktheit der $f \in \mathcal{F}$ können wir auf der kompakten Menge $\overline{B_{2r}}(w)$ ein $C = C(r)$ finden, so dass

$$|f(\zeta)| \le C \qquad \text{für alle } \zeta \in \overline{B_{2r}}(w) \text{ und } f \in \mathcal{F}.$$

Zusammen mit den Cauchyschen Abschätzungen (26) erhalten wir für alle $z \in \overline{B_r}(w)$

$$|f'(z)| \le \frac{1}{r} \max_{\zeta\in\overline{B_{2r}}(w)} \left|f(\zeta)\right| \le \frac{C}{r}.$$

Insgesamt zeigt dies die gleichgradige Stetigkeit:

$$z_1, z_2 \in B_r(w) : |z_1 - z_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \frac{C}{r} \leq \frac{\delta C}{r}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ lässt sich also ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ finden, das (24) erfüllt. □

Abschließend zeigen wir, dass die im Satz von Montel behauptete gleichmäßige Konvergenz noch besser ist als behauptet: Sämtliche Ableitungen müssen mitkonvergieren. Natürlich gilt dies im Reellen nicht (Gegenbeispiel?).

Satz 18. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_k)\colon U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist auch f holomorph, und sämtliche Ableitungen konvergieren lokal gleichmäßig, d.h. $f_k^{(n)} \to f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei c nullhomotope Schleife in U. Auf der kompakten Menge $\operatorname{Spur} c$ ist die lokal gleichmäßige Konvergenz $f_k \to f$ gleichmäßig, und der Cauchysche Integralsatz ist auf f_k anwendbar:

$$\int_c f(z)\,dz = \lim_{k\to\infty} \int_c f_k(z)\,dz = 0.$$

Also ist f holomorph.

Wir zeigen nun die lokal gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen. Sei $z_0 \in U$ mit $B_{2R}(z_0) \subset\subset U$. Dann gilt nach den Cauchyschen Ungleichungen, angewendet auf $f_k - f$,

$$\left|f_k^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\zeta\in\partial B_R(z)} \left|f_k(\zeta) - f(\zeta)\right| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\zeta\in B_{2R}(z_0)} \left|f_k(\zeta) - f(\zeta)\right|$$

für jedes $z \in B_R(z_0)$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f_k) auf $\overline{B_{2R}}(z_0)$ folgt damit die gleichmäßige Konvergenz $f_k^{(n)} \to f^{(n)}$ auf $B_R(z_0)$. □

Bemerkung. 1. Dieselben Sätze gelten beispielsweise auch für harmonische Funktionen. Der einzige Unterschied ist, dass man statt der Cauchyschen Integralformel entsprechende Mittelwertsformeln beweisen muss. Natürlich kann die Aussage über harmonische Funktionen auch aus unserem Resultat für holomorphe Funktionen gefolgert werden (wie?).

2. Dieudonné hat die Bedeutung der Techniken dieses Abschnitts folgendermaßen beschrieben (siehe `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Montel.html`):

The idea of compactness had emerged as a fundamental concept in analysis during the nineteenth century; provided a set is bounded in $\mathbb{R}^n$, it is possible to define for any sequence of points, a subsequence which converges to a point of $\mathbb{R}^n$ (the Bolzano-Weierstrass theorem). Riemann had sought to extend this extremely useful property to sets E of functions of real variables, but it soon appeared that boundedness of E was not sufficient. Around 1880 G. Ascoli introduced the additional condition of equicontinuity of E, which implies that E has again the Bolzano-Weierstrass property. But at the beginning of the twentieth century Ascoli's theorem had very few applications, and it was Montel who made it popular by showing how useful it could be for analytic functions of a complex variable.

`7. Vorlesung, Donnerstag 27.11.08` ________________________________

2.7. **Riemannscher Abbildungssatz.**

Satz 19. *Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet.*
(i) Existenz*: Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $f\colon G \to D$.*
(ii) Eindeutigkeit*: Die Abbildung f wird dadurch eindeutig festgelegt, dass sie ein gegebenes $a \in G$ auf $f(a) = 0$ abbildet mit $f'(a) > 0$.*

Beispiele. $G =$ Polygon, obere Halbebene, Schlitzgebiet

Die Existenzaussage wird auch durch jede Verknüpfung $\omega \circ f$ für $\omega \in \operatorname{Aut} D$ erfüllt. Der Raum der Abbildungen aus (i) ist also reell dreidimensional.

Im Beweis werden wir folgende Aussagen verwenden, die wir zur Übung überlassen.

Aufgaben. 1. Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.
2. Das homöomorphe Bild einer einfach zusammenhängenden Menge ist einfach zusammenhängend.
3. Auf jeder einfach zusammenhängenden offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^*$ existiert eine n-te Wurzel, also eine Abbildung $f_n\colon U \to \mathbb{C}$ mit $f_n^n(z) = z$. Die Abbildung f_n ist injektiv, sogar ein Homöomorphismus. Tatsächlich können wir $\sqrt[n]{z} := \exp(\frac{1}{n}\operatorname{Log} z)$ setzen, denn ein Logarithmus $\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i \arg z$ läßt sich auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet in $\mathbb{C}^*$ erklären. Siehe Funktionentheorie I.

Beweis. (ii) Eindeutigkeit: Sind f, g zwei solche Abbildungen, dann ist $f \circ g^{-1} \in \operatorname{Aut}(D)$ mit $f \circ g^{-1}(0) = 0$. Also ist nach dem Schwarzschen Lemma $f \circ g^{-1}$ eine Drehung, d.h. für ein c mit $|c| = 1$ gilt

$$(f \circ g^{-1})(z) = cz \qquad \Leftrightarrow \qquad f(z) = cg(z).$$

Aber aus $0 < f'(a) = cg'(a)$ und $0 < g'(a)$ folgt $c > 0$, und daher wegen $|c| = 1$ sogar $c = 1$.

(i) Existenz: Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Wir konstruieren eine holomorphe Abbildung

$$g\colon G \to G^* := g(G) \subset D \quad \text{ mit } g(a) = 0 \text{ und } g'(a) > 0.$$

Wir wählen zwei Punkte $a \in G$ und b aus $\mathbb{C} \setminus G$. Die Translation $T(z) := z - b$ bildet dann b auf 0 ab. Das verschobene Gebiet $G_1 := T(G)$ ist einfach zusammenhängend und enthält die 0 nicht.

Daher existiert auf G_1 ein Zweig der Quadratwurzel, den wir mit $\sqrt{}$ bezeichnen wollen. Die Bildmenge $G_2 := \sqrt{G_1}$ ist wiederum ein einfach zusammenhängendes Gebiet, denn $\sqrt{} \colon G_1 \to G_2$ ist ein Homöomorphismus.

Weil $\sqrt{} \colon G_1 \to G_2$ bijektiv ist, kann mit $z \in G_2$ nicht auch $-z \in G_2$ sein. Wegen der Offenheit von G_2 bedeutet das: Es gibt z_0 und $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(z_0) \cap G_2 = \emptyset$. Sei nun $S \in \operatorname{Aut} \hat{\mathbb{C}}$ eine Möbiustransformation, die $\hat{\mathbb{C}} \setminus B_\varepsilon(z_0)$ auf D abbildet (was ist die Formel für S?). Offenbar ist dann $G^* := S(G_2)$ eine Teilmenge von D.

Wir können weiterhin annehmen, dass $g := S \circ \sqrt{} \circ T$ die Bedingungen $g(a) = 0$ und $g'(a) > 0$ erfüllt, indem wir S durch eine Abbildung $\omega \circ S$ ersetzen, wobei $\omega \in \operatorname{Aut} D$ geeignet gewählt ist.

Es lohnt sich, den ersten Schritt im Falle eines Schlitzgebietes zu verstehen: Der Schlitz wird durch die Wurzel zu einer offenen Menge aufgebogen, die dann zum Außengebiet der Kreisscheibe wird.

2. Für $G^* \subset D$ einfach zusammenhängend mit $0 \in G^*$ führen wir nun die Menge von Funktionen ein

$$\mathcal{F} := \{f \colon G^* \to D : f \text{ holomorph und injektiv mit } f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

Zunächst ist $\mathcal{F}$ nicht leer, denn $f(z) = z$ gehört zu $\mathcal{F}$. Da die Werte der Funktionen durch 1 beschränkt sind, ist $\mathcal{F}$ eine normale Familie.

3. Wir finden ein Element in $\mathcal{F}$, das surjektiv nach D ist, indem wir eine Funktion suchen, die eine Maximalitätsbedingung erfüllt.

Es sei dazu

$$c := \sup\{f'(0) : f \in \mathcal{F}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Wegen $\mathrm{id} \in \mathcal{F}$ ist sicher $c \geq 1$.

Wir betrachten nun eine Folge $(f_n) \in \mathcal{F}$ mit $f_n'(0) \nearrow c$. Nach dem Satz von Montel und Satz 18 kann man eine Teilfolge auswählen, die wiederum mit (f_n) bezeichnet sei, sodass (f_n) zusammen mit allen Ableitungen gegen eine holomorphe Abbildung $f \in C^0(G^*, \mathbb{C})$ konvergiert. Daher ist $f'(0) = c$, insbesondere folgt daraus $c < \infty$. Wegen $|f_n| < 1$ gilt $|f| \leq 1$, und aus dem Maximumprinzip folgt sogar $|f| < 1$, d.h. $f \in C^0(G^*, \mathbb{C})$.

Nach Korollar 14 ist mit f_n auch der nicht-konstante Grenzwert f injektiv. Damit haben wir $f \in \mathcal{F}$ gezeigt.

Wäre nun $G_0 := f(G_*) \neq D$ so würde das folgende Lemma eine Funktion h ergeben, für die $h \circ f \in \mathcal{F}$ gilt, aber $(h \circ f)'(0) = h'(0)\, c > c$ im Widerspruch dazu, dass c ein Supremum ist. $\square$

Wir zeigen nun noch, dass Lösungen des genannten Maximierungsproblems $f'(0) \to \max$ tatsächlich surjektiv sein müssen.

Lemma 20. *Sei $G_0 \subsetneq D$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in G_0$. Dann gibt es eine injektive holomorphe Funktion $h\colon G_0 \to D$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) > 1$.*

Proof. Wir werden die Aussage aus dem Schwarzschen Lemma gewinnen, wobei wir h (bis auf Automorphismen) als eine Quadratwurzel definieren.

Es sei $b \in D \setminus G_0$. Für den Automorphismus

$$\omega_b \in \operatorname{Aut} D \quad \text{mit} \quad \omega_b(z) := \frac{z-b}{1-\bar{b}z} \quad \text{gilt} \quad \omega_b(b) = 0 \text{ und } \omega_b(0) = -b.$$

Die Menge $\omega_b(G_0)$ ist einfach zusammenhängend mit $0 \notin \omega_b(G_0)$. Wie im letzten Beweis können wir daher einen Zweig $\sqrt{\cdot}$ der Quadratwurzel finden, so dass $\sqrt{\cdot}$ injektiv ist und $\sqrt{\omega_b(G_0)} \subset D$.

Die gefundene Abbildung bildet den Nullpunkt auf den Punkt $\sqrt{-b}$ ab. Um eine Abbildung zu erhalten, die Null als Fixpunkt besitzt, betrachten wir noch den Automorphismus $\omega_{d,\lambda} \in \operatorname{Aut} D$,

$$\omega_{d,\lambda}(z) := e^{i\lambda} \frac{z-d}{1-\bar{d}z}, \qquad \text{mit } d := \sqrt{-b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nun sei

$$h := \omega_{d,\lambda} \circ \sqrt{\omega_b}\colon G_0 \to D$$

Unabhängig von λ gilt dann $h(0) = \omega_{d,\lambda}(\sqrt{-b}) = 0$. Schließlich wählen wir λ, so dass $h'(0) \in (0, \infty)$.

Wir behaupten nun $h'(0) > 1$. Dazu betrachten wir die Umkehrabbildung von h auf ganz D: Die Abbildung $h_* := \omega_b^{-1} \circ (\omega_{d,\lambda}^{-1})^2$ ist holomorph von D nach D, mit $h_*(0) = 0$. Das Schwarzsche Lemma ergibt daher $|h_*'(0)| \leq 1$. Wegen des Quadrats kann h_* keine Drehung sein und daher gilt $|h_*'(0)| < 1$. Es folgt, wie gewünscht

$$h'(0) = |h'(0)| = \frac{1}{|h_*'(0)|} > 1.$$

$\square$

Wir wollen abschließend noch begründen, warum der Riemannsche Abbildungssatz ein bedeutender Satz ist.

1. Für viele einfache Gebiete G lässt sich f nicht explizit durch elementare Funktionen angeben, z.B. für ein Quadrat. (Die Formel von Schwarz-Christoffel gibt jedoch Abbildungen der oberen Halbebene auf ein polygonal berandetes Gebiet durch eine Integraldarstellung an, siehe z.B. Fritzsche Abschnitt 5.5.)

2. Der Satz gilt, egal wie schlecht der Rand ∂G ist: er könnte z.B. fraktal berandet sein, etwa durch Stücke der Koch-Kurve.

3. Für ebene Gebiete komplizierterer Topologie ist eine entsprechende Aussage falsch: Beispielsweise sind Kreisringe $A_{r,R} = \{z : r < |z| < R\}$ genau dann konform äquivalent, wenn die Quotienten r/R übereinstimmen.

4. In höheren Dimensionen kann die entsprechende Aussage über winkeltreue Abbildungen nicht stimmen: Nach dem Satz 4 von Liouville muss f ja Ähnlichkeit oder Inversion sein. Nur sehr wenige Gebiete können dann noch konform äquivalent sein.

5. Existenzaussagen in der Mathematik sind immer schwer. Beispielsweise ist schwer zu zeigen, dass zwei beliebige einfach zusammenhängende Gebiete in der Ebene auch homöomorph sind. Der Riemannsche Abbildungssatz ist tatsächlich der einfachste Beweis auch für diese Aussage, obwohl er mit einer winkeltreuen Abbildung eigentlich viel zu viel liefert.

6. Wichtiger als die Aussage von Sätzen ist oft der Fortschritt in Methoden und Denkweisen, die ein gelungener Beweis bedeutet. In diesem Fall sind zu nennen der Begriff Kompaktheit und allgemeiner die Entwicklung der Funktionalanalysis.

Zur Geschichte des Satzes zitiere ich aus Wikipedia:

The theorem was stated (under the assumption that the boundary of G is piecewise smooth) by Bernhard Riemann in 1851 in his PhD thesis. Lars Ahlfors wrote once, concerning the original formulation of the theorem, that it was ultimately formulated in terms which would defy any attempt of proof, even with modern methods. Riemann's proof depended on the Dirichlet principle (whose name was created by Riemann himself), which was considered sound at the time. However, Karl Weierstraß found that this principle was not universally valid.

Later, David Hilbert was able to prove that, to a large extent, the Dirichlet principle is valid under the hypothesis that Riemann was working with. However, in order to be valid the Dirichlet principle needs certain hypotheses concerning the boundary of G which are not valid for simply connected domains in general. Simply connected domains with arbitrary boundaries were first treated in 1900 (by W. F. Osgood).

The first proof of the theorem is due to Constantin Carathéodory, who published it in 1912. His proof used Riemann surfaces and it was simplified by Paul Koebe two years later in a way which did not require them.

Another proof, due to Leopold Fejér and to Frigyes Riesz, was published in 1922 and it was rather shorter than the previous ones. In this proof, like in Riemann's proof, the desired mapping was obtained as the solution of an extremal problem. The Fejér-Riesz proof was further simplified by Alexander Ostrowski and by Carathéodory.

2.8. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 13 – Beispiel einer Möbiustransformation:

Finde heraus, wohin die Möbiustransformation

$$\eta \in \operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}, \qquad \eta(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

die reelle Achse abbildet. Worauf wird die obere Halbebene H abgebildet?

Aufgabe 14 – Fixpunkte:

Bestimme die Fixpunkte in $\hat{\mathbb{C}}$ der folgenden Möbiustransformationen: Dilatation, Translation, gespiegelte Inversion. Wie sieht es bei der ungespiegelten Inversion $z \mapsto 1/\overline{z}$ aus?

Aufgabe 15 – Doppelverhältnis:

Beweise: Der von einem distinkten Tripel z_1, z_2, z_3 eindeutig bestimmte Kreis bzw. die dadurch bestimmte Gerade enthält genau dann einen weiteren Punkt $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ wenn $\operatorname{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Aufgabe 16 – Geometrien á la Klein:

Benennen Sie Invarianten der folgenden Geometrien: Lineare Algebra, euklidische Geometrie, Topologie.

Aufgabe 17 – Stereographische Projektion:

Bestätige die folgenden Eigenschaften von

$$\operatorname{st}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2, \qquad \operatorname{st}(z) := \begin{cases} \frac{1}{|z|^2+1}\big(2\operatorname{Re} z, 2\operatorname{Im} z, |z|^2 - 1\big) & z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,1) & z = \infty. \end{cases}$$

a) $\operatorname{st}(z) \in \mathbb{S}^2$

b) Für $z \in \mathbb{C}$ liegt der Punkt $\operatorname{st}(z)$ auf der Geraden in $\mathbb{R}^3$ durch $(z, 0)$ und $N = (0, 0, 1)$.

c) $\operatorname{st}^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x + iy)$

d) Wie lautet die entsprechende Projektion st_a längs Geraden auf die Sphäre mit Mittelpunkt in $(0, 0, a)$ wobei $a \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 18 – Riemannsche Zahlenkugel:

Es sei $\hat{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel. Offene Mengen von $\hat{\mathbb{C}}$ sind nach Definition Urbilder offener Mengen von $\mathbb{S}^2$ unter der stereographischen Projektion st.

a) Jede offene Umgebung von $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ ist von der Form $\{\infty\} \cup \mathbb{C} \setminus K$, wobei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ist.

b) Zeige, dass $\hat{\mathbb{C}}$ kompakt ist.

c) Beschreibe den Effekt einiger Abbildungen von $\hat{\mathbb{C}}$ auf der Zahlenkugel, d.h. finde $f_S = \mathrm{st} \circ f \circ \mathrm{st}^{-1}$ für die folgenden Abbildungen $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$: $z \mapsto e^{i\varphi}z$ wobei $\varphi \in \mathbb{R}$, $z \mapsto 1/z$, $z \mapsto z^2$ ... Bestimme umgekehrt eine Möbiustransformation f, die einer 90°-Drehung der Sphäre um die y-Achse des $\mathbb{R}^3$ entspricht.

Aufgabe 19 – Automorphismen des Einheitskreises:

a) Rechne nach: $\omega_a \in \operatorname{Aut} D$ hat auf ganz D eine nicht verschwindende Ableitung.

b) Seien zwei Punkte $p, q \in D$ gegeben. Wie lautet ein $f \in \operatorname{Aut} D$ mit $f(p) = q$? Gegeben eine Richtung $v \in \mathbb{S}^1$ durch p, auf welche Richtung durch q wird sie abgebildet (denken Sie zuerst an den Fall $p = q = 0$). Durch welche zusätzliche Annahme wird also f wie zuvor eindeutig bestimmt?

Aufgabe 20 – Satz von Rouché:

a) Bestimme die Anzahl von Nullstellen in den angegebenen Gebieten:
• $2z^4 - 5z + 2$ in $|z| > 1$, • $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $|z| < 1$.

b) Beweise den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes von Rouché.

Aufgabe 21 – Konforme Äquivalenz:

a) Zeige, dass die Kreisringe $A_{r,R}$ und $A_{\lambda r, \lambda R}$ für $\lambda > 0$ konform äquivalent sind. (Die Umkehrung wäre schwieriger.)

b) Zeige, dass $A_{1,\infty} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ und $A_{0,\infty} = \mathbb{C}^*$ nicht konform äquivalent sind.

Aufgabe 22 – Eine Charakterisierung des konformen Typs:

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ entweder konform äquivalent zur Kreisscheibe D oder zu $\mathbb{C}$. Zeige: Das Gebiet ist genau dann zu D konform äquivalent, wenn es beschränkte nicht-konstante holomorphe Funktionen besitzt.

Aufgabe 23 – $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ ist nicht kompakt:

Betrachte $h_k \in \operatorname{Aut} D$ für $k \in \mathbb{N}$ mit

$$h_k(z) := \frac{z - \frac{1-k}{k}}{1 - \frac{1-k}{k} z}.$$

a) Bestimme den punktweisen Limes $\lim_{k\to\infty} h_k(z)$ für $z \in \overline{D}$. Schreibe $h_k(z) = \omega_a(z)$ für $a = a(k)$; wie verhält sich $a(k)$ für $k \to \infty$?

b) Das vorstehende Ergebnis sagt, dass die dreidimensionale Gruppe $\operatorname{Aut} D$ nicht kompakt ist (es gibt eine Folge, die keine in $\operatorname{Aut} D$ konvergente Teilfolge besitzt). Sind $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$ und $\operatorname{Aut}\hat{\mathbb{C}}$ kompakt? Nenne eine kompakte Transformationsgruppe.

Aufgabe 24 – Harmonische Funktionen:

Leite aus den entsprechenden Resultaten für holomorphe Funktionen folgende Varianten für harmonische Funktionen her:

a) Jede Familie beschränkter harmonischer Funktionen auf einem Kompaktum ist normal.

b) Ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann konform äquivalent zur Kreisscheibe D, wenn es beschränkte harmonische Funktionen besitzt.

Aufgabe 25 – Eine Automorphismengruppe:

Betrachte die dreidimensionale Untergruppe $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$ der Automorphismen $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ von $\hat{\mathbb{C}}$.

a) Finde eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, so dass $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset \operatorname{Aut} U$.
Tipp: Schaue scharf hin und bestimme eine eindimensionale Menge, die invariant unter ganz $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$ bleibt. Beweise dann, dass ein von dieser Menge berandetes Gebiet U invariant unter $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$ bleibt.

b) Zeige nun $\operatorname{Aut} U = \mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Aufgabe 26 – Dirichletsches Prinzip:

In dieser Aufgabe geht es um die von Riemann vorgeschlagene Beweisstrategie zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes. Sei dazu $U \subset \mathbb{R}^n$ (speziell $U \subset \mathbb{C}$) beschränkt und offen mit glattem Rand ∂U.

a) Eine Abbildung $h \in C^\infty(U,\mathbb{R}^m)$ ist harmonisch ($\Delta h = 0$) genau dann, wenn ihre *Energie* $E(h) := \int_U |dh|^2\,dx$ eine verschwindende erste Variation besitzt: Es gilt also

$$\frac{d}{dt}E(h+tf)\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{f“ur alle } f \in C_c^\infty(U,\mathbb{R}^m).$$

Tipp: Betrachte zuerst $m = 1$. Verwende den Gaußschen Divergenzsatz.

b) Untersuche nun die kritischen Punkte von Teil a) genauer und zeige, dass sie sämtlich absolute Minima sind: Eine Abbildung $h \in C^\infty(\overline{U}, \mathbb{R}^m)$ ist harmonisch genau dann, wenn sie unter allen glatten Abbildungen mit denselben Randwerten die Energie minimiert, d.h.

$$E(f) \geq E(h) \qquad \text{f"ur alle } f \in C^\infty(\overline{U}, \mathbb{R}^m) \text{ mit } f|_{\partial U} = h|_{\partial U}.$$

Tipp: Berechne $E(f) = E\big(h + (f - h)\big)$ für $m = 1$. Warum gilt die Rechnung auch für beliebiges $m \in \mathbb{N}$?

c) Wir betrachten nun den Fall $m = 2$ und

$$E_0 := \inf\{E(f) : f \in C^\infty(U, \mathbb{C}) \text{ mit } f(\partial U) \subset \mathbb{S}^1\} \in [0, \infty).$$

Ohne dies zu bestätigen, nehmen wir $E_0 < \infty$ an. Dann gibt es eine sogenannte *Minimalfolge* $f_n \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ mit $E(f_n) \searrow E_0$. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen

$$f_n \in \big\{f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2) : E(f) \in [E_0, E_0 + 1]\big\}.$$

Weil die f_n eine beschränkte Folge von Funktionen bilden, die in der genannten abgeschlossenen Menge liegt, so konvergiert die Folge gegen $h := \lim f_n$. Nach *b)* ist h harmonisch, und wegen des Maximumprinzips gilt sogar $h \in C^\infty(U, D)$.

Wir übergehen nun den Beweis einer Reihe weiterer Tatsachen: Durch ein Variationsargument zeigt man, dass h konform ist, und die Injektivität leitet man daraus her, dass der berandende Kreis $\mathbb{S}^1$ genau einmal durchlaufen wird. Damit ist h die im Riemannschen Abbildungssatz gesuchte Funktion. Wo steckt der entscheidende Fehler?

Aufgabe 27 – Offene Aufgabe:

Finde heraus, welche Interpretation die Gruppe $\mathsf{PSL}(2, \mathbb{C})$ in Bezug auf den hyperbolischen Raum gestattet.

Aufgabe 28 – Wiederholungsfragen:

a) Formuliere den Satz.

b) Warum ist er wichtig?

c) Gilt in höherer Dimension eine entsprechende Aussage?

d) Wie wird die Eindeutigkeitsaussage gezeigt?

e) Welche Bedingung muss man an eine Folge holomorpher Funktionen (f_n) stellen, damit eine Teilfolge konvergiert? Begründe, warum die Teilfolge dann konvergiert. Warum konvergieren auch die Ableitungen?

3. Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen und Polen

8. Vorlesung, Donnerstag 4.12.08

Wir wollen uns mit der Frage befassen, wie man eine meromorphe Funktion mit vorgegebenen Null- oder Polstellen findet. Dabei soll die Ordnung vorgeschrieben sein und die Stellen müssen natürlich diskret liegen, denn sonst kann die gesuchte Funktion nur konstant sein. Zur Vereinfachung werden wir uns hier nur mit dem Fall von auf ganz $\mathbb{C}$ definierten meromorphen Funktionen befassen.

Im Falle vorgegebener Polstellen werden wir sehen, dass man noch etwas mehr vorgeben kann: Tatsächlich kann man die Hauptteile $h_{d_k}(z)$ der Laurententwicklung in den Singularitäten d_k vorschreiben; das sieht man im Falle endlich vieler Polstellen $d_1, \dots, d_n$ sofort. Ebenso kann man endlich viele Nullstellen $b_1, \dots, b_k$ der Ordnungen n_j vorgeben. Man erhält in diesen beiden Fällen

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} h_{d_j}(z) \qquad \text{bzw.} \qquad f(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - b_j)^{n_j}$$

Im Falle unendlich vieler Pol- oder Nullstellen ist es naheliegend, statt dessen unendliche Summen bzw. Produkte zu betrachten. Dies gelingt allerdings nur, wenn man mit Modifikationen die Konvergenz sicherstellt. Insbesondere taucht die Konvergenzfrage für Produkte auf.

Es gibt viele Anwendungen der genannten Darstellungen. Wir werden die Gamma-Funktion behandeln.

3.1. **Partialbruchentwicklungen.** Für eine meromorphe Funktion f mit Pol in d, ist der *Hauptteil mit Entwicklungspunkt* d der singuläre Teil der Laurent-Reihe:

$$h_d(z) = \frac{a_{-n}}{(z-d)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-d)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-d}, \qquad a_{-n} \neq 0.$$

Eine vorgegebene Menge von Hauptteilen,

$$H = \{h_d(z) : d \in S \text{ mit } S \text{ diskret in } U \subset \mathbb{C}\},$$

nennt man eine *Hauptverteilung*; nur für S diskret kann $f \not\equiv \infty$ existieren (warum?). Jede meromorphe Funktion f definiert oder *löst* eine Hauptverteilung $H(f)$; für f holomorph setzt man $H(f) := \emptyset$.

Jeder Ball $(B_k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ enthält nur endlich viele Punkte der diskreten Menge S. Daher ist S abzählbar, d.h. $S = \{(d_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Für jede Abzählung gilt $d_n \to \infty$. Umgekehrt liefert jede solche Folge mit distinkten Gliedern eine diskrete Menge S.

Beispiel. Für $S := \mathbb{Z}$ konstruieren wir eine Funktion mit Polen vom Residuum 1. Es ist also $h_n(z) = \frac{1}{z-n}$ für $n \in \mathbb{Z}$, jedoch konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$ nicht. Wir wollen nun die Konvergenz erzwingen, indem wir zu jedem Term einen Summanden ohne Pol hinzuaddieren:

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big)$$

Um zu sehen, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ konvergiert, betrachten wir ein beliebiges $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Ist etwa $|z| \le R$, so gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \ge 2R$, dass $|z-n| \ge \big||n| - |z|\big| \ge \frac{1}{2}|n|$. Es folgt

$$\Big|\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big| = \frac{|z|}{|n||z-n|} \le \frac{2R}{n^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } |n| \ge 2R \ge 2|z|.$$

Die Reihe $2R \sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert aber und majorisiert f bis auf endlich viele Summanden.

Konvergenzerzeugende Summanden wie im Beispiel können wir auch im Falle von beliebigen vorgegebenen Hauptteilen erster Ordnung explizit konstruieren:

Satz 21. *Es seien $a_n, d_n \in \mathbb{C}^*$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim d_n = \infty$, ferner sei $d_0 := 0$, $a_0 \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Folge $k_n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(\frac{1}{z-d_n} + \sum_{j=0}^{k_n} \frac{z^j}{d_j^{j+1}}\Big) \tag{27}$$

folgende Eigenschaften hat:

- *f ist auf $\mathbb{C}$ meromorph und konvergiert lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C}^* \setminus \{d_n : n \in \mathbb{N}_0\}$.*
- *f hat einfache Polstellen vom Residuum a_n in den Punkten d_n für $n \in \mathbb{N}$; dies gilt auch für $n = 0$ sofern $a_n \neq 0$.*

Beweis. Wir zeigen die Konvergenz von (27). Alle weiteren Behauptungen folgen sofort.

Die geometrische Reihe liefert

$$\frac{1}{z-d_n} = -\frac{1}{d_n}\frac{1}{1-\frac{z}{d_n}} = -\frac{1}{d_n}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{d_n}\Big)^j \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| < |d_n|. \tag{28}$$

Sei weiterhin $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ eine konvergente Reihe positiver Summanden. Weil die Konvergenz der geometrischen Reihe lokal gleichmäßig ist, finden wir Indices k_n, so dass beispielsweise

$$\Big|\frac{a_n}{z-d_n} + \frac{a_n}{d_n}\sum_{j=0}^{k_n}\Big(\frac{z}{d_n}\Big)^j\Big| < \varepsilon_n \qquad \text{für alle } z \text{ mit } |z| \le \frac{1}{2}|d_n|. \tag{29}$$

Sei nun $z \in \mathbb{C}$. Wegen $|d_n| \to \infty$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass die Ungleichung $|z| \le \frac{1}{2}|d_n|$ für alle $n \ge N$ gilt. Also kann man alle bis auf endlich viele Terme der Summe (27) durch $\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n$

abschätzen; in einer Umgebung von z folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihenterme in (27) mit Index $\geq N$. Die Gesamtreihe konvergiert daher lokal gleichmäßig auf ihrem Definitionsbereich. $\square$

Wie weit man mit k_n gehen muss, hängt vom Abstand der Polstellen d_n und der Größe ihrer Residuen a_n ab. Der Beweis zeigt, dass die Konvergenz der Reihe (27) gegen unendlich immer schlechter wird, d.h. wir erwarten im allgemeinen eine schlechte Singularität in unendlich.

Der Satz wird zur späteren Bestimmung einer Funktion mit vorgegebenen Nullstellen bereits ausreichen. Wir erwähnen aber noch den allgemeinen Fall:

Satz 22 (Mittag-Leffler 1877). *Sei $S \subset \mathbb{C}$ diskrete Menge und $H = \{h_d : d \in S\}$ eine Hauptverteilung. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ mit Hauptteil H, d.h. $f(z) - h_d(z)$ hat jeweils in $d \in S$ eine hebbare Singularität.*

Beweis. Wir verallgemeinern die Idee von Satz 21. Da $\sum_{d\in S} h_d(z)$ nicht unbedingt zu konvergieren braucht, ist der Ansatz diesmal

$$f(z) := h_0(z) + \sum_{d\in S\setminus\{0\}} h_d(z) - P_d(z),$$

mit $P_d(z)$ einem geeigneten Polynom; dabei sei $h_0 \equiv 0$ falls $0 \notin S$. Wie in (29) fordert man eine Ungleichung vom Typ $|h_d(z) - P_d(z)| < \varepsilon_n$ auf $|z| < \frac{1}{2}|d|$, für alle $d \in S \setminus \{0\}$. Statt mit der geometrischen Reihe (28) läßt sich diese Ungleichung erfüllen, wenn man für P_d das Taylorpolynom von h_d mit Entwicklungspunkt 0 wählt; man geht wieder bis zu einer hinreichend hohen Ordnung $k = k(d)$. Die Konvergenzdiskussion ist dann die gleiche. $\square$

3.2. **Unendliche Produkte.** Produktentwicklungen werden in der reellen Analysis meist nicht behandelt. Definieren wir daher die Produktkonvergenz analog zum Fall von Reihen:

Definition. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge in $\mathbb{C}$, so dass $b = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^n b_j$ existiert. Man sagt dann: Das *unendliche Produkt* von b_n existiert und hat den Wert b. Man schreibt

$$b = \prod_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{30}$$

Beispiele. 1. (untypisch:) Ist $b_n := a$ für alle n mit $|a| < 1$, so gilt $\prod b_n = 0$.
2. (typisch:) Das Wallissche Produkt $\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \ldots$

Sind wie im zweiten Beispiel alle $b_n \neq 0$ und auch $b = \prod b_n \neq 0$, so erfüllen die *Partialprodukte* $p_n := \prod_{j=1}^n b_j$ die Identität $p_n = b_n p_{n-1}$. Im Grenzwert gilt daher $b = (\lim b_n)b$ und deshalb folgt $\lim b_n = 1$. Die Faktoren einer konvergenten Reihe mit nichtverschwindendem

Grenzwert gehen also gegen 1, genauso wie die Summanden einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden.

Wir benötigen Kriterien, um über die Konvergenz von Produkten entscheiden zu können. Dazu wollen wir

- unendliche Produkte auf Reihen zurückführen und weiter
- aus dem bekannten Begriff der absoluten Konvergenz einer Reihe ein hinreichendes Konvergenzkriterium für Produkte gewinnen.

Zum ersten Punkt. Ein einfacher Ansatz wäre $\prod b_n = \prod \exp \operatorname{Log} b_n = \exp \sum \operatorname{Log} b_n$. Allerdings ist der Logarithmus global nicht definiert. Wenn wir auf $b_n, b \in \mathbb{C}^*$ einschränken, so gilt aber wegen $b_n \to 1$ und es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - 1| < 1$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist der Logarithmus problemlos, wir können etwa den Hauptzweig $\operatorname{Log} z = \log |z| + i \arg z$ mit Argument in $(-\pi, \pi)$ nehmen. Schreiben wir noch $b_n = 1 + a_n$ für $n > N$, so ergibt sich

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \Big(\prod_{n=1}^{N} b_n\Big) \exp\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+a_n)\Big) \tag{31}$$

Für $|z| < 1$ ergibt die Reihe $\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 \pm \dots$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2}|z| \leq \big|\operatorname{Log}(1+z)\big| \leq 2|z| \qquad \text{für } |z| \text{ klein (z.B. für } |z| < \frac{1}{2}).$$

Wie im zweiten Punkt gesucht, erhalten wir damit ein hinreichendes Kriterium für die Produktkonvergenz:

Lemma 23. *Wenn $\sum a_n$ eine absolut konvergente Reihe darstellt, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass auch $\sum_{N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+a_n)$ absolut konvergiert. In diesem Fall konvergiert* (31) *mit $b_n := 1 + a_n$ und der Wert des Produkts ist von* 0 *verschieden genau dann, wenn alle Faktoren b_n von* 0 *verschieden sind.*

Ist die Voraussetzung des Lemmas erfüllt, so wollen wir sagen, dass auch das Produkt $\prod b_n = \prod (1 + a_n)$ *absolut konvergiert.*

`9. Vorlesung, Donnerstag 11.12.08` ________________________________

3.3. **Produktentwicklungen von Funktionen.** Analog zur Hauptverteilung von Polstellen wollen wir nun *Nullstellenverteilungen*

$$N = \{(b, n_b) : b \in S \text{ mit } S \text{ diskret in } U \subset \mathbb{C}, n_b \in \mathbb{N}\},$$

betrachten. Nicht-konstanten holomorphen Funktionen f ordnen wir ihre Nullstellenverteilung $N(f)$ zu, also die Menge der Nullstellen mit der jeweiligen Ordnung. Wenn f zu bestimmen ist, sagen wir auch: f *löst* die Verteilung $N = N(f)$. Die diskrete Menge S ist abzählbar, $S = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$; wir nehmen stets die b_j als paarweise verschieden an.

Die Idee zur Lösung des Problems In den vorbereitenden Rechnungen (21) zum Satz von Rouché haben wir bereits festgestellt:

Lemma 24. *Eine holomorphe Funktion f löst die Nullstellenverteilung $N = \{(b_j, n_j) : j \in \mathbb{N}\}$ genau dann, wenn die meromorphe Funktion $\frac{f'}{f}$ die Hauptverteilung löst*

$$H = \Big\{ \frac{n_j}{z - b_j} : (b_j, n_j) \in N \Big\}.$$

In drei Schritten gewinnen wir hieraus einen Ansatz für die gesuchte Funktion f.

1. Betrachten wir den Spezialfall von Nullstellen erster Ordnung $n_j = 1$ in Punkten $b_j \in \mathbb{C}^*$, $j \in \mathbb{N}$. Dann können wir $\frac{f'}{f}$ als Reihe durch Satz 21 bestimmmen: Es gibt eine Folge $k_j \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\text{(32)} \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(z) \qquad \text{mit} \qquad h_j(z) := \frac{1}{z - b_j} + \frac{1}{b_j} \sum_{\ell=0}^{k_j} \Big(\frac{z}{b_j}\Big)^{\ell}$$

lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus S$ konvergiert.

2. Gesucht ist nun die Lösung f der komplexen linearen nicht-autonomen Differentialgleichung $f' = (\sum h_j) f$. Da wir nur einen Ansatz gewinnen wollen, ignorieren wir das Problem, dass die Koeffizienten h_j singuläre Pole besitzen. Zuerst bestimmen wir termweise Lösungen f_j von $f_j' = h_j f_j$, die natürlich nur bis auf Vielfache bestimmt sind:

$$\text{(33)} \qquad f_j(z) = \exp\Big(\int^z h_j(\zeta)\, d\zeta \Big) = \big(z - b_j\big) \exp \sum_{\ell=0}^{k_j} \frac{1}{\ell+1} \Big(\frac{z}{b_j}\Big)^{\ell+1}$$

Nun wollen wir $f := \prod f_j$ bilden, denn $f'/f = (\prod f_j)'/\prod f_j = \sum h_j$. Aber dazu müssen wir noch jedes f_j mit dem Faktor $-1/b_j$ multiplizieren, so dass $f_j(z) \to 1$ für $j \to \infty$, und somit $f = \prod f_j$ die notwendige Bedingung für Produktkonvergenz erfüllt. Zusätzlich ersetzen wir noch $\ell + 1$ durch $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Das ergibt folgenden Ansatz für f:

$$\text{(34)} \qquad f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{b_j}\Big) \exp \sum_{\ell=1}^{k_j+1} \frac{1}{\ell} \Big(\frac{z}{b_j}\Big)^{\ell}$$

Durch Ableiten kann man verifizieren, dass diese Produktdarstellung die Gleichung (32) löst, sofern die Partialprodukte lokal gleichmäßig konvergieren.

3. Den Fall von Nullstellen $b_j \in \mathbb{C}^*$ beliebiger Ordnung $n_j \in \mathbb{N}$ kann man wie zuvor behandeln: Man bildet dazu eine neue Nullstellenliste $\tilde{b}_j$, bei der jede Nullstelle b_j jeweils n_j-mal wiederholt wird. Es ergibt sich eine Produktdarstellung für f, bei der man jeweils n_j

gleiche Faktoren zu einer n_j-ten Potenz zusammenfassen kann. Zusätzlich berücksichtigen wir auch noch eine mögliche Nullstelle in $z = 0$ der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Das Ergebnis formulieren wir im Satz:

Satz 25 (Weierstraßscher Produktsatz)**.** *Es sei* $N = \{(b_j, n_j) : j \in \mathbb{N}_0\}$ *eine Nullstellenverteilung, mit* $b_j \in \mathbb{C}^*$ *und* $n_j \in \mathbb{N}$ *für* $j \in \mathbb{N}$ *und* $b_0 = 0$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist das unendliche Produkt*

$$f(z) := z^{n_0} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{b_j}\right) \exp \sum_{\ell=1}^{k_j+1} \frac{1}{\ell} \left(\frac{z}{b_j}\right)^{\ell} \right)^{n_j} \tag{35}$$

eine ganze Funktion mit Nullstellenverteilung N, *vorausgesetzt* $k_j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ *wird so gewählt, dass die Reihe* (32) *auf* $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} \{b_j\}$ *lokal gleichmäßig konvergiert.*

Man kann die Darstellung (35) so verstehen, dass man dem offensichtlichen Ausdruck $z^{n_0} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_j}\right)^{n_j}$ konvergenzerzeugende Exponentialfaktoren hinzugefügt hat: Auf jeder festen Kreisscheibe gehen die Faktoren des unendlichen Produktes (aber nicht die Exponentialterme selbst!) schnell genug gegen 1, so dass das Produkt konvergiert.

Beweis. Wir müssen die Konvergenz zeigen. Dies vorausgesetzt, folgt wegen $\exp \neq 0$, dass f die Verteilung N löst.

Wenn wir Mehrfachnennungen in der Folge b_j zulassen, reicht es, die Konvergenz für das Produkt (34) zu zeigen, das wir in der Form $\prod u_j(z)$ schreiben wollen. Wegen $|b_j| \to \infty$ können wir einen Index J finden, so dass $|b_j| > R$ für alle $j \geq J$ gilt.

Für $z \in D_R$ ist die Identität

$$\frac{f_j'(z)}{f_j(z)} = h_j(z), \qquad j \geq J,$$

nun rigoros: In (33) treten keine Pole mehr auf, und diese Gleichung gilt natürlich für das Vielfache u_j der f_j.

Nach Wahl von k_j ist die Reihe $\sum_{j \geq J} h_j(z)$ absolut und gleichmässig konvergent auf D_R. Das gleiche gilt auch für ihre Stammfunktion und die anderen Reihen der folgenden Identität:

$$\begin{aligned} \int_0^z \sum_{j \geq J} h_j(\zeta)\, d\zeta &= \sum_{j \geq J} \int_0^z h_j(\zeta)\, d\zeta \\ &= \sum_{j \geq J} \int_0^z \frac{u_j'(\zeta)}{u_j(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{j \geq J} \int_0^z (\operatorname{Log} u_j)'(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j \geq J} \operatorname{Log} u_j(z) \end{aligned}$$

Dabei beachten wir, dass für $j \geq J$ die Funktion $u_j\colon D_R \to \mathbb{C}^*$ nullstellenfrei ist und auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet D_R daher einen Logarithmus besitzt. Ferner sind wegen Holomorphie die auftretenden Kurvenintegrale für $j \geq J$ wohldefiniert.

Die Reihe u_j konvergiert gegen 1 und hat für $j \geq J$ nur nicht-verschwindende Faktoren. Nach Lemma 23 impliziert die letzte Formel die absolute Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod_{j\in\mathbb{N}} u_j$. □

Wir diskutieren abschließend die Eindeutigkeitsfrage. Wie das Beispiel z und ze^z zeigt dürfen wir nicht die Eindeutigkeit erwarten. Allerdings ist die Multiplikation mit Exponentialtermen die einzige Freiheit:

Satz 26. *Zwei ganze Funktionen f und F haben dieselbe Nullstellenverteilung N genau dann, wenn eine ganze Funktion g existiert, so dass*

$$F(z) = e^{g(z)} f(z).$$

Beweis. Sicherlich haben F und f dieselbe Nullstellenverteilung N. Sind andererseits f, F mit derselben Nullstellenverteilung gegeben, so sind alle Singularitäten von $\frac{F}{f}$ hebbar. Aber diese Funktion ist nullstellenfrei und auf der einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{C}$ definiert. Sie lässt sich daher als $\frac{F}{f} = e^g$ mit g ganz schreiben (siehe Funktionentheorie 1). □

3.4. **Gamma-Funktion.** Wir wollen zeigen, wie der Weierstraßsche Produktsatz benutzt werden kann, um eine Formel für die Gamma-Funktion herzuleiten. Dies ist eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$, die die Fakultäten interpoliert, $f(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$. Dass rechts $n-1$ statt n steht, hat historische Gründe. Name und Schreibweise geht auf Legendre 1811 zurück.

Allgemeiner als dies fordert man die Funktionalgleichung

$$f(z+1) = zf(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \qquad f(1) = 1. \tag{36}$$

Man erkennt aus $f(1) = 0f(0)$, $f(0) = -f(-1)$ etc., dass in 0 und in den negativen ganzen Zahlen einfache Pole auftreten, deren Residuum wir nun bestimmen wollen. Zunächst ergibt sich durch Iterieren

$$f(z+n) = z(z+1)\ldots(z+n-1)\, f(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt für $z \to 1-n = -k$

$$f(1) = (1-n)(2-n)\ldots(-1) \lim_{z\to 1-n} \big(z-(1-n)\big) f(z) \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to -k} (z-k) f(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{res}_{-k} f = \frac{(-1)^k}{k!} \qquad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{37}$$

Wir behaupten nun, dass die Inverse der gesuchten Funktion, also $g := \frac{1}{f}$, die Produktdarstellung

$$g(z) = e^{h(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \tag{38}$$

mit h ganz besitzt. Tatsächlich hatten wir bereits in Abschnitt 3.1 gesehen, dass die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}$ konvergiert. Nach dem Weierstraßschen Produktsatz ist daher die rechte Seite konvergent. Weil beide Seiten dieselben Nullstellen haben, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 26 die Identität für eine geeignete ganze Funktion h.

`10. Vorlesung, Donnerstag 18.12.08` ———

Dabei ist $h(z)$ so zu wählen, dass $\frac{1}{g}$ die Funktionalgleichung (36) erfüllt, d.h.

$$zg(z+1) = g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \qquad g(1) = 1. \tag{39}$$

Schreiben wir nun $g(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$ mit Partialprodukten

$$g_n(z) := e^{h(z)} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = \frac{1}{n!} \exp\Big(h(z) - z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)\, z \prod_{k=1}^{n} (z+k).$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 \overset{(39)}{=} \frac{zg(z+1)}{g(z)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{zg_n(z+1)}{g_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \exp\Big(h(z+1) - h(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)(z+n+1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\Big(h(z+1) - h(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \log n\Big) \Big(\underbrace{1 + \frac{z+1}{n}}_{\to 1}\Big).
\end{aligned}$$

Die Folge $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ ist positiv und monoton fallend (*Aufgabe 1*) und besitzt deshalb einen Grenzwert,

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\Big) \approx 0{,}577 \tag{40}$$

die sogenannte *Euler-Mascheroni-Konstante* (Euler 1781); es ist unbekannt, ob γ rational ist.

Setzen wir nun $h(z) := \gamma z$, so gilt wie gewünscht $\exp\big(h(z+1) - h(z) - \gamma\big) \equiv 1$. Dies und

$$\lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \exp\Big(\gamma - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big)(n+1)! = \lim_{n\to\infty} \exp\big(-\log n\big)(n+1) = 1$$

bedeuten, dass (39) erfüllt ist. Wir brauchen nur noch den Kehrwert $f = \frac{1}{g}$ zu nehmen und halten als Ergebnis unserer Herleitung fest:

Satz 27 (Euler). *Die* Gamma-Funktion

$$\Gamma(z) := e^{-\gamma z}\,\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)^{-1}e^{z/k} \tag{41}$$

ist auf $\mathbb{C}$ *meromorph und erfüllt die Funktionalgleichung* (36). *Ihre Pole in* $\{0,-1,-2,\ldots\}$ *haben die in* (37) *angegebenen Residuen.*

Wir bemerken, dass das Produkt ohne Exponentialterm nicht konvergieren würde.

Wir wollen noch einige andere Darstellungen der Gamma-Funktion ansprechen.

Satz 28. (i) [Gauss] *Für* $z \neq 0,-1,-2\ldots$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)};$$

insbesondere hat Γ *keine Nullstellen.*
(ii) [Euler 1729] *Für* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

(iii) [Bohr-Mollerup 1922] *Die Funktion* Γ *ist analytische Fortsetzung der eindeutig bestimmten Funktion* $f\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$, *die die Funktionalgleichung* (36) *erfüllt und für die* $x\mapsto \log f(x)$ *konvex ist.*

Beweis. (i) Wir schreiben Γ_n für das n-te Partialprodukt und erhalten:

$$\begin{aligned}\Gamma_n(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)^{-1}e^{z/k} = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{ke^{z/k}}{z+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}\,e^{-\gamma z}\,\exp\Big(z\big(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\big)\Big)\end{aligned}$$

Aber der letzte Term lässt sich umschreiben zu

$$e^{-\gamma z}\exp\Big(z\big(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\big)\Big) = n^z\exp\Big(z\big(-\gamma+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\big)\Big),$$

wobei der Exponentialterm rechts nach (40) den Grenzwert 1 besitzt.

Behauptung (ii) folgt durch partielle Integration und Anwendung des Lebeguesche Grenzwertsatzes (siehe z.B. [FL], S. 188). Zum Beweis von (iii) siehe [C], S.180. □

Die Stirlingsche Formel ist nützlich zur näherungsweisen Berechnung der Gamma-Funktion. Sie lautet

$$\lim_{z\to\infty}\Gamma(z)z^{\frac{1}{2}-z}e^z = \sqrt{2\pi} \qquad \text{oder} \qquad \Gamma(z)\approx\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}\,e^{-z},$$

jedoch würde der Beweis sicherlich zwei Seiten füllen. Interessiert man sich nur für Fakultäten, so wird daraus

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n, \qquad n \to \infty.$$

Es gibt genauere Abschätzungen, siehe z.B. [BF], S. 202 ff.

Die Gamma-Funktion hat verschiedene Anwendungen, insbesondere in der Zahlentheorie. Aber auch in Geometrie und Analysis taucht sie auf:

Satz 29. *Das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes ist* $\mathrm{vol}(B^n) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen. 1. Entsprechend gilt $\mathrm{vol}(B^n_r) = r^n \,\mathrm{vol}(B^n)$ für Radius $r > 0$.
2. In geraden Dimensionen $n = 2k$ gilt $\mathrm{vol}(B^{2k}) = \frac{1}{k!}\pi^k$; in ungeraden Dimensionen entsteht ein etwas unübersichtlicher Produktausdruck.
3. Eine Konsequenz des Satzes ist auch eine Formel für den Inhalt der Sphären, denn aus dem Gaußschen Integralsatz folgt $\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n) = (n+1)\,\mathrm{vol}(B^{n+1})$.

Beweis. Wir benutzen Induktion über n.

Der Satz von Fubini (bzw. das Cavallierische Prinzip) leistet den Induktionsschritt. Die dabei auftretenden Schnitte des Balles mit Hyperebenen sind $(n-1)$-dimensionale Bälle: $B^n \cap \{x_{n+1} = t\} = B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}} \times \{t\}$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(B^n) &= \int_{-1}^1 \mathrm{vol}\left(B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}\right) dt = 2\int_0^1 \mathrm{vol}\left(B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}\right) dt\\ &= \mathrm{vol}\left(B^{n-1}\right) 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}^{\,n-1} dt = \mathrm{vol}\left(B^{n-1}\right) 2\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt,\end{aligned}$$

wobei wir mit $\cos t$ substituiert haben.

Wir gewinnen zuerst eine Rekursionsformel für das Integral $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$. Die partielle Integration

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt = \int_0^{\pi/2} (-\cos t)' \sin^{n-1} t\, dt \overset{\text{part.}}{=} (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, \sin^{n-2} t\, dt,$$

zusammen mit $\cos^2 = 1 - \sin^2$ ergibt

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Durch Induktion zeigen wir nun $I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}$: Wegen $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ stimmt der Beginn, und der Schritt folgt aus

$$I_{n-1}I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}I_{n-1} \overset{\text{Ind.ann.}}{=} \frac{n-1}{n}\,\frac{\pi}{2(n-1)} = \frac{\pi}{2n}.$$

Daraus folgt nun eine Rekursionsformel für $\mathrm{vol}(B^n)$:

$$\mathrm{vol}(B^n) = \mathrm{vol}(B^{n-1})2I_n = \mathrm{vol}(B^{n-2})4I_{n-1}I_n = \mathrm{vol}(B^{n-2})\frac{2\pi}{n}.$$

Sie liefert gerade den Induktionsschritt für die Behauptung unseres Satzes:

$$\mathrm{vol}(B^n) = \mathrm{vol}(B^{n-2})\frac{2\pi}{n} \overset{\text{Ind.ann.}}{=} \frac{\pi^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)}\frac{\pi}{n/2} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Der Beginn folgt aus den bekannten Fällen, wobei wir noch $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ benutzen müssen:

$$\mathrm{vol}(B^1) = 2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2})}, \qquad \mathrm{vol}(B^2) = \pi = \frac{\pi}{\Gamma(2)}$$

□

3.5. Übungsaufgaben.

Aufgabe 29 – Hauptverteilungen:

a) Finde ein Beispiel einer Hauptverteilung, so dass keine konvergenzerzeugenden Summanden nötig sind (mit mehr als endlich vielen Punkten!).

b) Finde ein Beispiel einer Hauptverteilung, für das nur ein konvergenzerzeugender Summand nicht ausreicht.

Aufgabe 30 – Eindeutigkeit für Hauptverteilungen:

Ist eine Funktion, die eine Hauptverteilung löst, eindeutig bestimmt? Welcher Satz gilt?

Aufgabe 31 – Hauptverteilung auf anderen Gebieten als $\mathbb{C}$:

a) Zeige durch Abwandlung des Beweises, dass jede Hauptverteilung auf der Kreisscheibe D lösbar ist. Gib noch weitere derartige Gebiete an (obere Halbebene, Kreisring, etc.?).

b) Gib eine Funktion auf D an, die Pole erster Ordnung vom Residuum 1 in allen Punkten $1 - \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ hat.

Aufgabe 32 – Produktkonvergenz:

Untersuche auf absolute Konvergenz und ermittele gegebenenfalls den Wert:

$$\text{a)} \quad \prod_{n=2}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \qquad \text{b)} \quad \prod_{n=2}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) \qquad \text{c)} \quad \prod_{n=2}^{\infty}\Big(1 - \frac{2}{n(n+1)}\Big)$$

Aufgabe 33 – Zur Γ-Funktion:

a) Zeige $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ für $z \notin \mathbb{Z}$ durch Betrachten von g aus (38).

b) Gewinne eine Produktdarstellung für $\frac{\sin \pi z}{\pi}$. Berechne $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Aufgabe 34 – Das bekannteste Beispiel für Partialbruchzerlegung und für das Weierstraß-Produkt:

a) Mache einen Ansatz für eine Partialbruchzerlegung von $\pi \cot \pi z$. Darin bleibt gemäß Aufgabe 22 noch eine Funktion f zu bestimmen.

b) Leite durch Differenzieren eine Identität für f' her. Zeige, dass f' periodisch ist und für $\operatorname{Im} z \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 geht. Folgere, dass f' identisch verschwindet.

c) Zeige, dass f eine ungerade Funktion sein muss, und daher sogar f identisch verschwindet. Gewinne daraus die Partialbruchzerlegungen von $\pi \cot \pi z$

d) Gewinne einen Produktansatz für $\sin \pi z$ aus dem Weierstraßschen Satz. Bestimme die Funktion e^g durch Bildung der logarithmischen Ableitung mit Hilfe von c).

e) Setze den Wert $z = \frac{1}{2}$ in das Sinus-Produkt ein und folgere die Wallissche Darstellung von $\pi/2$.

Aufgabe 35 – Euler-Mascheroni-Konstante:

Zeige, dass die durch

$$\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

definierte Folge streng monoton fällt und nach unten beschränkt ist.

Aufgabe 36 – Wiederholungsfragen:

a) Was kann man vorschreiben, wenn man Funktionen mit unendlich vielen Singularitäten konstruieren möchte?

b) Was sind und wie "funktionieren" konvergenzerzeugende Summanden?

c) Wann heißt ein unendliches Produkt $\prod b_n$ absolut konvergent?

d) Ist eine Partialbruch- bzw. eine Produktentwicklung eindeutig durch eine Hauptverteilung bzw. Nullstellenverteilung bestimmt?

e) Mit welchem Ansatz haben wir die Gamma-Funktion konstruiert?

4. ELLIPTISCHE FUNKTIONEN

`11. Vorlesung, Donnerstag 15.1.09`

Auch in diesem Kapitel geht es um die Konstruktion spezieller Funktionen: Diesmal behandeln wir periodische Funktionen. Als Begleittext empfehle ich das Buch Freitag/Busam.

4.1. **Periodische Funktionen und Gitter.** Wir wollen uns mit periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ befassen. Ein Vektor $\omega \in \mathbb{R}^n$ heißt *Periode* von f, wenn gilt $f(x+\omega) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen auch, eine Funktion f ist *periodisch unter einer Menge* $L \subset \mathbb{R}^n$, wenn f alle Elemente von L als Periode besitzt.

Beispiele. 1. Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die Periode $2\pi i \in \mathbb{C}$; natürlich ist auch jede andere Zahl $2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Periode.
2. Eine konstante Funktion $f \equiv a \in \mathbb{R}^m$ hat jede Zahl $\omega \in \mathbb{R}^n$ als Periode.
3. Die Perioden der Funktion $(x, y) \mapsto \sin x$ bilden die Menge $2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.
4. Jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hat die Periode $0 \in \mathbb{R}^n$.

Satz 30. (*i*) *Die Perioden einer Funktion* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *bilden eine Untergruppe* L *von* $(\mathbb{R}^n, +)$.
(*ii*) *Speziell bilden die Perioden einer nicht-konstanten meromorphen Funktion* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eine diskrete Menge, und die Menge der unter einer gegebenen Untergruppe* $L \subset (\mathbb{C}, +)$ *periodischen Funktionen bildet einen Körper* $K(L)$.
(*iii*) *Jede diskrete Untergruppe* L *von* $(\mathbb{R}^n, +)$ *ist von der Form*

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_k$$

mit $0 \leq k \leq n$ *und* $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{R}^n$ *linear unabhängigen Vektoren.*

Im Körper $K(L)$ identifizieren wir die Konstanten in $\mathbb{C}$ mit Funktionen; darunter finden sich Null und Eins des Körpers.

Beweis. (*i*) Man sieht schnell, dass aus $\omega, \eta \in L$ folgt $\omega \pm \eta \in L$.

(*ii*) Falls die Perioden einer meromorphen Funktion einen Häufungspunkt besitzen, so müssen alle Ableitungen dort verschwinden. Also ist die Taylorreihe in diesem Punkt konstant, und wegen Analytizität die Funktion selbst konstant. Um zu sehen, dass die Menge der periodischen meromorphen Funktionen einen Körper bildet, beachten wir, dass per Definition eine meromorphe Funktion den Wert ∞ nur auf einer diskreten Menge annimmt. Daher ist für $f \not\equiv 0$ meromorph auch $1/f$ wieder meromorph.

(*iii*) Siehe Übungen. □

Die Zahl $k \leq n$ im Satz nennt man den *Rang* der Untergruppe. Falls $k = n$, so heißt die diskrete Untergruppe ein *Gitter [lattice]*. In $\mathbb{C}$ gibt es genau drei Möglichkeiten für den Rang und damit für diskrete Untergruppen:
a) $k = 0$ bedeutet $L = \{0\}$;
b) für $k = 1$ gibt es $\omega \neq 0$, so dass $L = \{n\omega : n \in \mathbb{Z}\}$;
c) im Gitterfall $k = 2$ gibt es ω_1, ω_2 linear unabhängig, so dass $L = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.
Entsprechend heißt eine unter L periodische Funktion *unperiodisch*, *einfach periodisch* oder *doppelt periodisch*. Beispielsweise ist die Exponentialfunktion einfach periodisch.

Aufgabe. Entscheide: Ist $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, und $a, b \in \mathbb{C}$, so ist auch aL und $L + b$ ein Gitter. Sei L ein Gitter. Gib echte Teilmengen von L an, die ebenfalls Gitter sind.

Jede Untergruppe $L < (\mathbb{R}^n, +)$ definiert die Quotientengruppe $\mathbb{R}^n/L$, deren Repräsentanten die Nebenklassen $[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : x - y \in L\}$ sind. Im Falle eines Gitters L bezeichnet man $T^n := \mathbb{R}^n/L$ als *Torus*. Durch Einführen der Quotiententopologie wird T^n zu einem kompakten metrischen Raum. In Dimension 2 stellt man sich $T = T^2$ gern vor, indem man gegenüberliegende Seiten des *Periodenparallelogramms*

$$P := \{s\omega_1 + t\omega_2 : 0 \leq s, t < 1\}$$

identifiziert. Eine L-periodische Funktion f hat einen auf $\mathbb{R}^n/L$ wohldefinierten Quotienten $\hat{f}$. Wir werden im folgenden oft etwas nachlässig sein, und beispielsweise P und die Nebenklassen $P = P(L) = \mathbb{C}/L$, bzw. f und $\hat{f}$ nicht unterscheiden.

Bemerkungen. 1. Auf die gleiche Weise kann man durch geeignete Identifikation der Seiten eines $2(g+1)$-gons eine Fläche vom Geschlecht g erhalten ($\rightsquigarrow$ Übungen).

2. Wegen der Anwendungen in der Kristallographie sind die Symmetrien von Gittern genau untersucht worden. Bezeichnen wir mit $\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^n)$ die Gruppe der Isometrien von $\mathbb{R}^n$, also der längentreuen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$; diese Gruppe besteht aus sämtlichen Bewegungen von $\mathbb{R}^n$. Die Menge derjenigen Isometrien,

$$\mathcal{I} := \{G \in \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } G(L) \to L \text{ bijektiv}\}$$

besteht dann aus diskreten Gruppen, die jeweils L als Untergruppe enthalten. Ist ein Gitter L gegeben, so heißt eine (diskrete) Gruppe $G \in \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^n)$ mit $L < G$, die das Gitter L bijektiv auf sich selbst abbildet, eine *kristallographische Gruppe*. Eine kristallographische Gruppe hat einen wohldefinierten Quotienten auf dem Torus $\mathbb{R}^n/L$, man kann sie auch gleichermaßen als diskrete Symmetriegruppe eines Torus definieren. Es gibt bis auf Isomorphie 17 solcher Gruppen für $n = 2$ (ein Beispiel sehen wir in den Übungen) und 230 für $n = 3$.

4.2. **Ordnung einer elliptischen Funktion.**

Definition. Eine *elliptische Funktion* $f\colon \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist eine unter einem Gitter L periodische meromorphe Funktion.

Die elliptischen Funktionen zu einem Gitter L bilden einen Körper $K(L)$. Auch alle Ableitungen dieser Funktionen liegen in $K(L)$. Beachten Sie, dass eine elliptische Funktion neben den Perioden in L noch zusätzliche Perioden besitzen kann.

Wir formulieren nun Aussagen über elliptische Funktionen, die auf Liouville zurückgehen. Wir beachten, dass meromorphe Funktionen diskrete Polstellenmengen haben, so dass in $\overline{P}$ und damit in P nur endlich viele Pole liegen. Daher ist die Residuensumme über alle Punkte in P endlich.

Satz 31. (i) *Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.*
(ii) *Jede elliptische Funktion f hat eine verschwindende Residuensumme in $P = \mathbb{C}/L$:*

$$\sum_{z\in P} \operatorname{res}_z f = 0. \tag{42}$$

Insbesondere gibt es keine elliptische Funktion mit genau einem Pol erster Ordnung in P.
(iii) *Nicht-konstante elliptische Funktionen nehmen jeden Wert aus $\hat{\mathbb{C}}$ mit Vielfachheit gezählt gleich oft an. Insbesondere besitzen sie gleich viele Null- und Polstellen, d.h. hat eine Funktion Nullstellen $b_1, \dots, b_N$ der Ordnung $k_1, \dots, k_N$ und Polstellen $d_1, \dots, d_P$ der Ordnung $m_1, \dots, m_P$, so gilt*

$$\sum_{j=1}^{N} k_j = \sum_{j=1}^{P} m_j. \tag{43}$$

Man nennt die natürliche Zahl (43) die *Ordnung* von f, geschrieben $\operatorname{Ord}(f)$. Falls f konstant ist, setzen wir $\operatorname{Ord}(f) = 0$. Aus (ii) folgt, dass es keine elliptische Funktion der Ordnung 1 geben kann.

Beweis. (i) Auf dem kompakten Abschluss $\overline{P}$ nimmt die stetige Funktion f ein Maximum $m := \max_{z\in\overline{P}} |f(z)| \in [0,\infty)$ an. Wegen Periodizität ist m sogar eine Schranke für $|f|$ auf ganz $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant. (Man sagt: Auf der kompakten Menge T^2 kann die holomorphe Funktion $\hat{f}\colon T^2 \to \mathbb{C}$ nach Liouville kein Maximum annehmen.)

(ii) Nehmen wir zuerst an, dass ∂P keinen Pol enthält. Wenn wir für $a, b \in \mathbb{C}$ ein Kurvenintegral über die Strecke $\overline{ab}$ in der Form $\int_a^b f(\zeta)\,d\zeta := \int_c f\,dz$ schreiben, wobei

$c(t) = ta + (1-t)b$ für $t \in [0,1]$, so ergibt sich nach dem Residuensatz:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z\in P} \operatorname{res}_z f &= \int_{\partial P} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_0^{\omega_1} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_2} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\omega_2}^{0} f(\zeta)\,d\zeta \end{aligned}$$

Wegen der Periodizität gilt aber $\int_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_2} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\omega_1}^{0} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_0^{\omega_1} f(\zeta)\,d\zeta$; ebenso sind zweiter und vierter Term negativ gleich. Also verschwindet die rechte Seite.

Weil die Menge der Pole diskret ist, gibt es ein $a \in P$, so dass das verschobene Parallelogramm $\tilde{P} := a + P$ in seinem Rand keinen Pol enthält. Man erhält daher das Ergebnis im allgemeinen, wenn man P durch $\tilde{P}$ ersetzt.

(*iii*) Wir benutzen hier wieder den vom Satz von Rouché und Lemma 24 bekannten Trick, vgle. dazu (21): Ist f nicht konstant, so hat die logarithmische Ableitung $g := f'/f$ Residuen in den Null- und Polstellen von f. Hat genauer f eine Nullstelle a der Ordnung k, so ist $\operatorname{res}_a g = k$, bzw. in einem Pol a der Ordnung m gilt $\operatorname{res}_a g = -m$. Ferner ist die logarithmische Ableitung ebenfalls eine elliptische Funktion und daher folgt die gewünschte Aussage mit Hilfe von (42). □

`12. Vorlesung, Donnerstag 22.1.09` ______________________

4.3. **Weierstraßsche $\wp$-Funktion.** Wir wollen nun eine möglichst einfache elliptische Funktion konstruieren. Sie muss wenigstens die Ordnung 2 besitzen. Der einfachste Fall wäre, dass die Funktion lediglich einen Pol zweiter Ordnung in $0 \in P$ hat, d.h. die Funktion würde Pole zweiter Ordnung genau in den Gitterpunkten L besitzen. Eine solche Funktion werden wir als Reihe konstruieren. Der offensichtliche Ansatz dazu wäre $\sum_{\omega\in L} 1/(z-\omega)^2$. Allerdings konvergiert diese Reihe nicht, wie aus folgender Aussage mit $s = 1$ hervorgeht:

Lemma 32. *Es sei L ein Gitter und $L' := L \setminus \{0\}$. Die Reihe*

$$\sum_{\omega\in L'} \frac{1}{|\omega|^{2s}}$$

divergiert für $s = 1$ und konvergiert für $s > 1$.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $L = \mathbb{Z}^2$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei Q_k der Rand des Quadrats um 0 mit Kantenlänge $2k$. Er enthält genau $8k$ Gitterpunkte, deren Betrag zwischen k und $k\sqrt{2}$ liegt. Für $s = 1$ folgt daher die Abschätzung

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{m^2+n^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(m,n)\in Q_k\cap\mathbb{Z}^2} \frac{1}{m^2+n^2} > \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{8k}{2k^2} = 4\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} = \infty.$$

Nun betrachten wir $s > 1$: Es gilt

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^s} \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{8k}{k^{2s}} = 8\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^{2s-1}} \overset{(*)}{<} \infty.$$

Wer die Abschätzung $(*)$ nicht kennt, kann sie folgendermaßen beweisen: Im später benötigten Fall $s = \frac{3}{2}$ ist die Konvergenz von $\sum 1/k^2$ elementar, und daher folgt $(*)$ für $s > \frac{3}{2}$ durch Majorisierung. Allgemein folgt $(*)$ im Falle $1 < s$ durch Cauchy-Kondensation oder mit Integralvergleich.

Um dasselbe Ergebnis für allgemeine Gitter herzuleiten, schreiben wir $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Wir definieren eine invertierbare lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi(1) := \omega_1,\ \varphi(i) := \omega_2.$$

Die Norm der Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \in \mathsf{GL}(2)$ definiert dann eine Konstante $c > 0$ mit

$$|n+im| = \left|\varphi^{-1}(n\omega_1 + m\omega_2)\right| \le c|n\omega_1 + m\omega_2| \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{|n\omega_1+m\omega_2|} \le c\frac{1}{|n+im|}$$

und daraus folgt die Konvergenzaussage auch für L. Um die Divergenzaussage auf L zu übertragen, benutzt man entsprechend die umgekehrte Abschätzung. ☐

Wir geben nun die gesuchte Funktion an, indem wir konvergenzerzeugende Summanden benutzen.

Satz 33. *Es sei L ein Gitter und $L' := L \setminus \{0\}$. Dann ist die* Weierstraßsche $\wp$-Funktion

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L'} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

für $z \in \mathbb{C}\setminus L$ konvergent. Setzen wir noch $\wp(z) := \infty$ für $z \in L$, so gilt:
(i) $\wp$ ist elliptisch der Ordnung 2 (insbesondere periodisch),
(ii) die Singularitäten von $\wp$ sind Pole zweiter Ordnung in L,
(iii) $\wp$ ist gerade, d.h. $\wp(-z) = \wp(z)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Konvergenz der Reihe. Sei z gegeben mit $|z| < R$. Dann erfüllen alle $\omega \in L$ bis auf endlich viele Ausnahmen:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \frac{|\omega^2 - (z-\omega)^2|}{|\omega|^2|z-\omega|^2} = \frac{|z||z-2\omega|}{|\omega|^2|z-\omega|^2} \le \frac{R\,3|\omega|}{|\omega|^2\frac{1}{4}|\omega|^2} \le \text{const}\,\frac{1}{|\omega|^3} \tag{44}$$

Nach dem Lemma, angewandt mit $s = 3/2$, konvergiert die Summe $\wp(z)$.

(iii) Wegen $\omega \in L \Leftrightarrow -\omega \in L$ sieht man dies direkt.

(i) Wir zeigen die Periodizität, die wegen der konvergenzerzeugenden Summanden nicht offensichtlich ist. Weil die Konvergenz lokal gleichmäßig ist, dürfen wir gliedweise ableiten (Satz 18):

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3} \tag{45}$$

Offenbar ist auch $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ für alle $\omega \in L$, so dass

$$\big(\wp(z+\omega) - \wp(z)\big)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \wp(z+\omega) - \wp(z) =: c \in \mathbb{C}.$$

Wir verwenden (iii), um $c = 0$ nachzuweisen: Sei dazu $\omega_0 \in L$, so dass $\frac{1}{2}\omega_0 \notin L$. (Man könnte beispielsweise für ω_0 den betragsmäßig kleinsten Vektor aus L' wählen.) Dann gilt

$$c = \wp\Big(-\frac{1}{2}\omega_0 + \omega_0\Big) - \wp\Big(-\frac{1}{2}\omega_0\Big) \stackrel{(iii)}{=} 0.$$

(ii) Weil die Reihe von $\wp$ konvergiert, ist klar, dass $\wp$ in L Pole zweiter Ordnung besitzt und außerhalb von L keine weiteren Pole vorhanden sind. □

Wir halten noch ein paar Eigenschaften der Ableitung $\wp'$ fest:

Satz 34. *Die Ableitung $\wp'$ der Weierstraßschen $\wp$-Funktion* (45)
(i) *ist elliptisch der Ordnung* 3,
(ii) *hat Pole dritter Ordnung in L,*
(iii) *hat Nullstellen erster Ordnung in den Halbgitter-Punkten $(\frac{1}{2}L)\setminus L$, von denen drei im Periodenparallelogramm P liegen,*
(iv) *ist ungerade, $\wp'(-z) = -\wp'(z)$.*

Wird L durch ω_1 und ω_2 erzeugt, so enthält P genau die drei Punkte $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ aus $(\frac{1}{2}L)\setminus L$.

Beweis. Alle Eigenschaften außer (iii) folgen direkt aus (45). Ist aber $\rho \in (\frac{1}{2}L)\setminus L$, so folgt aus der Ungeradheit

$$\wp'(\rho) \stackrel{2\rho\in L}{=} \wp'(\rho - 2\rho) = \wp'(-\rho) \stackrel{(iv)}{=} -\wp'(\rho),$$

also tatsächlich $\wp'(\rho) = 0$. □

4.4. **Der Körper der elliptischen Funktionen.** Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass alle elliptischen Funktionen rationale Funktionen der geraden Funktion $\wp$ und der ungeraden Funktion $\wp'$ sind.

Wir befassen uns zunächst mit geraden Funktionen; wir müssen zeigen dass sie rational in $\wp$ sind, d.h. in der Form $f(z) = \frac{P(\wp(z))}{Q(\wp(z))}$ geschrieben werden können, wobei P und $Q \not\equiv 0$ Polynome mit komplexen Koeffizienten sind.

Lemma 35. (i) *Jede gerade elliptische Funktion $f \in K(L)$ mit Polstellenmenge in L ist ein Polynom in der $\wp$-Funktion.*
(ii) *Jede gerade elliptische Funktion ist rationale Funktion in der $\wp$-Funktion.*

Beweis. (i) Wir behaupten, es existieren Koeffizienten a_k mit $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k \wp(z)^k$.

Falls f konstant ist, stimmt die Behauptung. Anderenfalls hat f einen Pol in L. Die Laurentreihe von f um $0 \in L$, die wegen der Geradheit von f nur gerade Potenzen enthält, lautet dann

$$f = a_{-2n} z^{-2n} + a_{-2n+2} z^{-2n+2} + \ldots \qquad \text{mit } a_{-2n} \neq 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Durch Abziehen des Poles erhalten wir daher eine Funktion

$$g := f - a_{-2n}\wp^n$$

die wiederum elliptisch ist, gerade, und eine Polstellenmenge in L besitzt. Die Ordnung von g ist aber echt kleiner als die von f. Iteriert man nun das Verfahren, indem man jeweils den Pol von höchster Ordnung abzieht, so konstruiert dies das behauptete Polynom.

(ii) Sei $a \notin L$ ein Pol von f. Dann ist die Funktion $\wp(z)$ in einer Umgebung von a in eine Taylorreihe entwickelbar. Also ist lokal $\wp(z) - \wp(a) = b_k(z-a)^k + b_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots$ mit $k \geq 1$ und daher besitzt

$$z \mapsto \big(\wp(z) - \wp(a)\big)^N f(z)$$

für hinreichend großes N eine hebbare Singularität. Da $\overline{P}$ kompakt ist, besitzt f in $P \setminus L$ nur endlich viele Pole $a_1, \ldots, a_k$. Also hat für passend gewählte $N_1, \ldots, N_k$ die Funktion

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{k} \big(\wp(z) - \wp(a_j)\big)^{N_j}$$

keine Pole außerhalb von L. Nach Teil (i) ist dann aber g als Polygnom in $\wp$ darstellbar. Also ist f eine rationale Funktion in $\wp$. $\square$

Für die rationalen Funktionen in f schreiben wir

$$\mathbb{C}(f) = \{g(z) : g(z) = R(f(z)) \text{ mit } R \text{ rational } \}$$

Nun zeigen wir, dass jede elliptische Funktion rationale Funktion von $\wp$ und $\wp'$ ist. Genauer gilt:

Satz 36. *Sei L ein Gitter. Dann gilt $K(L) = \mathbb{C}(\wp) + \mathbb{C}(\wp)\wp'$, d.h. $K(L)$ ist ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}(\wp)$.*

Beweis. Die beiden behaupteten Summanden entsprechen einer Zerlegung des Körper $K(L)$ in die geraden und die ungeraden elliptischen Funktionen.

Tatsächlich läßt sich jede Funktion als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden u schreiben:

$$f(z) = \frac{1}{2}\big(f(z) + f(-z)\big) + \frac{1}{2}\big(f(z) - f(-z)\big) = g(z) + u(z)$$

Die gerade Funktion g ist nach Teil (ii) des Lemmas rational in $\wp$. Aber die Funktion $u/\wp'$ ist auch gerade und damit ebenfalls rational in $\wp$, was die Behauptung ergibt. $\square$

Liegen die Polstellen einer elliptischen Funktion $f \in K(L)$ sogar in L, dann erhält man eine Darstellung

$$f(z) = P(\wp) + Q(\wp)\wp' \qquad \text{mit Polynomen} \qquad P, Q, \tag{46}$$

denn man kann im Beweis des Satzes sogar Teil (i) des Lemmas anwenden.

Beispielsweise haben die Ableitungen $\wp''$, $\wp'''$, etc. eine Darstellung (46) und ebenso alle Potenzen von $\wp'$. Falls diese Funktionen gerade sind (wann sind sie das?) gilt sogar $Q \equiv 0$. In allen genannten Fällen erhält man Differentialgleichungen für die $\wp$-Funktion; wir kommen darauf noch zurück.

`13. Vorlesung, Donnerstag 5.2.09` ———

4.5. **Abelsches Theorem.** Das Abelsche Theorem sagt, wo die Null- und Polstellen einer elliptischen Funktion liegen können. Tatsächlich gibt es dafür eine gar nicht so offensichtliche notwendige Bedingung, die zusammen mit (43) sogar hinreichend ist. Der Beweis der entsprechenden Existenzaussage für elliptische Funktionen ist durchaus technisch; sie wird auf den Weierstraßschen Produktsatz zurückgeführt.

Satz 37 (Abel 1826)**.** *Eine elliptische Funktion mit Gitter L und Nullstellen $b_1, \dots, b_N$ der Vielfachheit $k_1, \dots, k_N$ sowie Polstellen $d_1, \dots, d_P$ der Vielfachheit $m_1, \dots, m_P$ existiert genau dann, wenn erstens* (43) *gilt und zweitens*

$$\sum_{j=1}^{N} k_j b_j = \sum_{j=1}^{P} m_j d_j \mod L. \tag{47}$$

Jede Funktion, die dieser Bedingung genügt, ist bis auf einen Faktor in $\mathbb{C}^*$ eindeutig bestimmt.

Dabei haben wir stillschweigend angenommen, dass die Punkte $b_1, \dots, b_N, d_1, \dots, d_P$ paarweise verschieden modulo L sind.

Beispiele. 1. Für $\wp'$ lautet (47) $\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 3 \cdot 0 \mod L$ und trifft daher zu.
2. Für $\wp$ verschwindet die rechte Seite von (47) ebenfalls. Wenn $\wp$ eine doppelte Nullstelle b hat, so muss $b \in \frac{1}{2}L$ liegen, tatsächlich gilt beispielsweise für das Quadratgitter $L = \mathbb{Z}^2$, dass $b = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$. Anderenfalls hat $\wp$ zwei einfache Nullstellen, die modulo L von der Form $\pm b$ sind. Natürlich kann man dies auch sofort aus der Geradheit von $\wp$ schließen.

Die eine Richtung des Beweises ist einfach und ähnlich dem Beweis der Residuenbedingung (42):

Beweis der Notwendigkeit. Wir nehmen an, dass ∂P keine Nullstelle b_j oder Polstelle d_j einer gegebenen Funktion f enthält. Wenn das nicht der Fall ist, muss P durch ein verschobenes Parallelogramm $P' = P + a$ ersetzt werden.

Wir betrachten die unperiodische Funktion

$$g(z) := z\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Wie in (21) sieht man, dass sie in b_j bzw. d_j die Residuen $k_j b_j$ bzw. $-m_j d_j$ besitzt. Daher ergibt der Residuensatz

$$\begin{aligned} 2\pi i\Big(\sum_{j=1}^{N} k_j b_j - \sum_{j=1}^{P} m_j d_j\Big) &= \int_{\partial P} g(z)\,dz \\ &= \int_0^{\omega_1} g(z)\,dz - \int_{\omega_2}^{\omega_2+\omega_1} g(z)\,dz + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} g(z)\,dz - \int_0^{\omega_2} g(z)\,dz. \end{aligned}$$

Wegen der Periodizität von f gilt für die ersten beiden Summanden:

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_1} g(z)\,dz - \int_{\omega_2}^{\omega_2+\omega_1} g(z)\,dz &= \int_0^{\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \int_0^{\omega_1} (z+\omega_2)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &= -\omega_2 \int_0^{\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \end{aligned}$$

entsprechend für die letzten beiden Summanden.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass der erhaltene Ausdruck in $2\pi i\,L$ liegt, d.h. wir müssen zeigen $\int f'/f dz \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$. Dazu deuten wir das erhaltene Integral als Kurvenintegral über den geschlossenen Weg $f([0,\omega_1])$ im Bild $\mathbb{C}^*$:

$$\int_0^{\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_{f([0,\omega_1])} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \in 2\pi i\,\mathbb{Z}.$$

□

Wir verlagern die Hauptarbeit für den Beweis der Umkehrung in ein kniffliges Lemma:

Lemma 38. *Zu jedem Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ existiert eine holomorphe Funktion $\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:*
(i) Für $i = 1, 2$ existieren $a_i, c_i \in \mathbb{C}$, so dass

$$\sigma(z+\omega_i) = \exp(a_i z + c_i)\,\sigma(z) \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(ii) σ hat eine Nullstelle z_0 von erster Ordnung und alle anderen Nullstellen sind modulo L mit z_0 äquivalent (und ebenfalls von erster Ordnung).

Beweis des Satzes von Abel. Wir geben den Beweis zunächst für den Fall, dass alle $k_j = 1$ und alle $m_j = 1$ sind. Durch die Addition eines Gittervektors zu einem der Punkte können wir annehmen, dass die Punkte b_j, d_j so gewählt sind, dass (47) nicht nur modulo L, sondern sogar exakt gilt.

Dann setzen wir

$$f(z) := \frac{\prod_{j=1}^N \sigma(z_0 + z - b_j)}{\prod_{j=1}^P \sigma(z_0 + z - d_j)}.$$

Nach Aussage (ii) des Lemmas hat diese Funktion Nullstellen genau in $z = b_j$ und Polstellen genau in $z = d_j$.

Es bleibt zu zeigen, dass f periodisch ist. Wegen Eigenschaft (i) des Lemmas gilt aber für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} f(z+\omega_i) &= \frac{\prod_{j=1}^N \exp\big(a_i(z_0+z-b_j)+c_i\big)}{\prod_{j=1}^P \exp\big(a_i(z_0+z-d_j)+c_i\big)}\, f(z) \\ &= f(z)\exp\Big([N-P]\big(a_i(z_0+z)+c_i\big) + a_i\big[\sum_{j=1}^N d_j - \sum_{j=1}^P b_j\big]\Big). \end{aligned}$$

Aber die beiden Klammern $[\ldots]$ verschwinden: Für die erste Klammer hatten wir das schon erwähnt, und die zweite Klammer ist gerade unsere Voraussetzung (47). Dies bedeutet, dass f elliptisch ist.

Im allgemeinen Fall mit Vielfachheiten brauchen wir nur die beiden Punktelisten durch jeweils k_j-fache Mehrfachnennung von b_j, bzw. m_j-fache von d_j zu modifizieren. Die obige Funktion leistet dann immer noch das Gewünschte, denn die Null- und Polstellenordnungen addieren sich zum gewünschten Wert. □

Beweis des Lemmas. Wir konstruieren σ mit dem Weierstraßschen Produktsatz 25 als

$$\sigma(z) := z \prod_{\omega \in L'} \Big(1 - \frac{z}{\omega}\Big) \exp\Big(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\omega^2}\Big) \tag{48}$$

Offenbar hat σ dann Nullstellen erster Ordnung genau in L. Um den Produktsatz anwenden zu dürfen, müssen wir nur überprüfen, dass die durch (32) zugeordnete Reihe

$$\sum_{\omega \in L'} \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega}\Big(1 + \frac{z}{\omega}\Big) = \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{z-\omega} + \frac{\omega + z}{\omega^2} = \sum_{\omega \in L'} \frac{z^2}{\omega^2(z-\omega)}$$

konvergiert. Aber dies ist klar, weil ω in dritter Ordnung im Nenner steht, vergleiche das in (44) benutzte Argument.

Nun müssen wir das Transformationsverhalten $\sigma(z+\omega_i) = e^{a_i z + c_i}\sigma(z)$ nachweisen, wie in (i) behauptet. Weil die Funktionen $\sigma(z+\omega_i)$ und $\sigma(z)$ dieselbe Nullstellenmenge L haben, ist ihr Quotient holomorph auf der einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{C}$. Daher ist er nach einem Satz aus Funktionentheorie I darstellbar als

$$\frac{\sigma(z+\omega_i)}{\sigma(z)} = e^{h_i(z)}, \qquad i = 1, 2, \tag{49}$$

mit h_i ganz. Um die Linearität $h_i(z) = a_i z + c_i$ zu beweisen, genügt es zu zeigen

$$h_i'' \equiv 0 \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Die Ableitung von (49) ergibt, wenn wir das Argument z unterdrücken,

$$\sigma'(z+\omega_i) = h_i' e^{h_i}\sigma + e^{h_i}\sigma' = h_i'\sigma(z+\omega_i) + \frac{\sigma'}{\sigma}\sigma(z+\omega_i).$$

Daraus folgt

$$h_i'(z) = \frac{\sigma'(z+\omega_i)}{\sigma(z+\omega_i)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

und unsere Behauptung ist äquivalent zu

$$\Big(\frac{d}{dz}\frac{\sigma'}{\sigma}\Big)(z+\omega_i) = \Big(\frac{d}{dz}\frac{\sigma'}{\sigma}\Big)(z),$$

d.h. wir müssen zeigen, dass die zweite logarithmische Ableitung von σ eine elliptische Funktion ist. Aber Ableiten von (48) ergibt zunächst

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L'} \left(\frac{-1}{\omega(1-\frac{z}{\omega})} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L'} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right),$$

und dann weiter

$$\frac{d}{dz}\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = -\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L'} \left(\frac{-1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right) = -\wp(z).$$

Also ist die zweifache logarithmische Ableitung von σ tatsächlich elliptisch. $\square$

Man kann auch die Gleichung $-(\operatorname{Log}\sigma)'' = \wp$ aufintegrieren, wegen Definiertheitsfragen und Polen muss man aber vorsichtig sein.

`14. Vorlesung, Donnerstag 12.2.09` ________________

4.6. **Differentialgleichung für $\wp$.** Wendet man Satz 36 auf Potenzen von $\wp'$ an, so erhält man Differentialgleichungen erster Ordnung für die $\wp$-Funktion. Der einfachste Fall dafür ist die Differentialgleichung $(\wp')^2 = P(\wp)$. Dabei ist P ein Polynom, das wir nun explizit bestimmen wollen. Um seine vom Gitter abhängigen Koeffizienten anzugeben, werden wir die Laurent-Entwicklung von $\wp$ benötigen:

Satz 39. *Sei L ein Gitter und $L' := L \setminus \{0\}$.*
(*i*) *Dann konvergiert die* Eisenstein-Reihe

$$G_n := \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{\omega^n}$$

absolut für $n = 4, 6, 8, \ldots$, und verschwindet für $n = 3, 5, 7, \ldots$.
(*ii*) *Die $\wp$-Funktion hat die Laurent-Entwicklung um* 0

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, G_{2n+2}\, z^{2n}, \tag{50}$$

die in der größten Kreisscheibe um 0*, welche noch in $\mathbb{C} \setminus L'$ liegt, konvergiert.*

Beweis. (*i*) Die absolute Konvergenz der Eisenstein-Reihen G_n mit $n \geq 3$ folgt sofort aus Lemma 32, das Verschwinden für ungerade n aus $\omega \in L \Leftrightarrow -\omega \in L$.

(*ii*) Für $\omega \in L'$ und $|z| < |\omega|$ schreiben wir die Summanden von $\wp$ mit Hilfe der geometrischen Reihe als

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\omega}\right)^j\right)^2 - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\frac{z^k}{\omega^{k+2}};$$

beim letzten Gleichheitszeichen haben das Reihenprodukt ausmultipliziert. Durch Einsetzen in die $\wp$-Funktion erhalten wir die Laurent-Entwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\omega^{k+2}} z^k = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\Big(\sum_{\omega \in L'} \frac{1}{\omega^{k+2}}\Big) z^k = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1) G_{k+2} z^k.$$

Die Darstellung gilt, wenn $|z| < |\omega|$ für alle $\omega \in L'$, womit (50) gezeigt ist. □

Satz 40. *Für jedes Gitter L gilt die Differentialgleichung*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \tag{51}$$

mit vom Gitter L abhängigen Konstanten $g_2 := 60G_4$ und $g_3 := 140G_6$.

Beweis. Wir bestätigen die Differentialgleichung als eine Identität von Laurent-Reihen.

Aus der Laurent-Entwicklung (50)

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + O(z^6)$$

folgt

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + O(z^5), \qquad \wp'(z)^2 = 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + O(z^2),$$

sowie

$$\wp(z)^2 = z^{-4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + O(z^4), \qquad \wp(z)^3 = z^{-6} + 9G_4z^{-2} + 15G_6 + O(z^2).$$

Aus den beiden letzten Ergebnissen folgern wir (analog zum Beweis von Lemma 35(i))

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + O(z^2).$$

Aber die rechte Seite dieser Gleichung ist holomorph und elliptisch, also konstant. Folglich muss $O(z^2)$ verschwinden.

Damit ist die Identität zunächst auf dem Konvergenzkreis der Laurent-Entwicklung bewiesen. Weil aber beide Seiten der Differentialgleichung sogar auf $\mathbb{C} \setminus L$ analytisch sind, muss die Identität auch dort gelten. $\square$

Aufgabe. Leite durch mehrfaches Ableiten von (51) eine Darstellung der geraden Funktion $\wp^{(4)}$ als Polynom in $\wp$ her. Folgere daraus, dass sich die Reihen G_8, G_{10}, ... als Polynome in G_4 und G_6 darstellen lassen.

In den folgenden beiden Abschnitten ziehen wir interessante Folgerungen aus der Differentialgleichung.

4.7. **Elliptische Integrale.** Wir wollen nun elliptische Funktionen als Umkehrfunktionen sogenannter elliptischer Integrale erkennen. Im folgenden Spezialfall ist das einfach zu sehen:

Korollar 41. *Für jedes rechteckige Gitter L sind g_2, g_3 reell und es gilt*

$$\int \frac{1}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}\, dt = -\wp^{-1}\big|.$$

Dabei seien die Grenzen innerhalb desjenigen Intervalls $[e, \infty)$ gewählt, das den Abschluss des Definitionsbereichs des Integranden darstellt.

Es ist klar, dass $4t^3 - g_2t - g_3 \to \infty$ für $t \to \infty$. Daraus folgt, dass der Integrand genau auf einem Intervall $[e, \infty)$ definiert ist, und eventuell noch zusätzlich auf einem dazu disjunkten abgeschlossenen Intervall.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass g_2, g_3 reell sind. Ist $L = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_2'$ rechteckig, so gilt $\omega \in L \Leftrightarrow \overline{\omega} \in L$. Daraus folgt entweder direkt, dass $G_2, G_3 \in \mathbb{R}$, oder man argumentiert folgendermaßen: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\overline{\wp(x)} = \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{(x-\overline{\omega})^2} - \frac{1}{\overline{\omega}^2} = \wp(x) \qquad \Rightarrow \qquad \wp(x) \in \mathbb{R}.$$

Die Einschränkung der komplexen Differentialgleichung (51) auf $\mathbb{R}$ zeigt dann $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$.

Auf $(0, \omega_1)$ hat $\wp$ genau in $x = \omega_1/2$ einen kritischen Punkt. Wegen des Pols $1/x^2$ gilt $\lim_{x \searrow 0} \wp(x) \to \infty$, d.h. $\wp$ ist auf $(0, \omega_1/2)$ streng monoton fallend. Mit der Bezeichnung für den Halbwert $e := \wp(\omega_1/2)$ folgt also: Die Funktionen

$$\wp\colon (0, \omega_1/2] \to [e, \infty) \qquad \text{und ihre Umkehrfunktion} \qquad \wp^{-1}\colon [e, \infty) \to (0, \omega_1/2]$$

sind monoton fallend.

Das gegebene Integral verwandelt sich durch Substitution in ein Integral, das wegen der Differentialgleichung trivial ist, dabei sei $e \leq a \leq b$:

$$-\int_a^b \frac{1}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}\, dt = \int_{\wp^{-1}(a)}^{\wp^{-1}(b)} \frac{\wp'(x)}{-\sqrt{4(\wp(x))^3 - g_2\wp(x) - g_3}}\, dx \overset{(51)}{=} \int_{\wp^{-1}(a)}^{\wp^{-1}(b)} 1\, dx$$

Wegen $\wp' < 0$ auf $(0, \omega_1/2)$ haben wir die Differentialgleichung in der Form $\wp' = -\sqrt{\ldots}$ eingesetzt. □

Der angegebene Fall ist zwar speziell, jedoch lassen sich mit etwas Arbeit auch allgemeinere Klassen von Polynomen darauf zurückführen. Ein wichtiger, aber gar nicht so einfacher Schritt ist das folgende Resultat:

Lemma 42. *Gegeben zwei Zahlen $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ mit mit $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, so gibt es ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ mit Gitterkonstanten g_2, g_3.*

Der Beweis erfordert die Untersuchung sogenannter elliptischer Modulfunktionen; dies würde ein oder zwei Vorlesungen in Anspruch nehmen, siehe z.B. [BF], Kap. V.7 und V.8. Ganz allgemein ist die *Diskriminante* eines Polynoms ein Ausdruck, der verschwindet, wenn das Polynom mehrfache Nullstellen besitzt. In unserem Fall folgt aus einer Faktorisierung

$$P(t) = 4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3) = 4t^3 - 4t^2(e_1+e_2+e_3) + 4t(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) + 4e_1e_2e_3,$$

tatsächlich nach kurzer Rechnung der folgende Ausdruck für die Diskriminante:

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2.$$

Übrigens sind in unserem Fall die Zahlen e_1, e_2, e_3 gerade die Halbwerte der $\wp$-Funktion.

Man kann nun untersuchen, wie sich ein allgemeines Polynom $P(z)$ von dritter Ordnung unter einer Substitution $z \mapsto Az$ mit $A \in \mathsf{PSL}(2,\mathbb{C})$ verhält. Geeignete Wahl der Matrix führt P auf ein Polynom mit verschwindendem quadratischen Term zurück, das man mit dem Lemma in der Form $t^3 - g_2 t - g_3$ für ein Gitter L darstellen kann. Auch Polynome vierter Ordnung lassen sich noch behandeln. Genaueres finden Sie z.B. in [BF], Kapitel V.5. Damit verallgemeinert sich unser Korollar zu folgendem Ergebnis:

Satz 43. *Ist $P(t)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Nullstellen, so existiert eine nicht-konstante elliptische Funktion f mit folgender Eigenschaft: Ist die Einschränkung $f\colon D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}$ offen umkehrbar zu $f^{-1}\colon f(D) \to D$, so gilt bei geeigneter Wahl der Wurzel $\sqrt{\cdot}$, dass $(f^{-1})'(z) = 1/\sqrt{P(z)}$.*

Die unbestimmten Integrale $\int 1/\sqrt{P(z)}$ sind also tatsächlich Umkehrfunktionen der elliptischen Funktionen. Aus der reellen Sicht formuliert: Die Stammfunktionen elliptischer Integrale besitzen Umkehrfunktionen, die analytische Fortsetzungen nach $\mathbb{C}$ gestatten, welche (überraschenderweise!) doppelt periodisch sind.

Tatsächlich kann sogar jedes Integral $\int R\big(t, \sqrt{Q(t)}\big)\,dt$ mit R rational und Q Polynom auf die Form $\int 1/\sqrt{P(t)}\,dt$ zurückgeführt werden, mit P (wie zuvor) Polynom dritter oder vierter Ordnung. Schließlich kann man sich auch davon überzeugen, dass das namensgebende Bogenlängenintegral der Ellipse $\int \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt$ durch Transformation auf diesen Fall zurückgeführt werden kann.

`15. Vorlesung, Freitag 13.2.09` ______________________

4.8. **Elliptische Kurven.** Eine Grundfrage der Mathematik ist die Bestimmung der Lösungsmengen von Gleichungen. In der algebraischen Geometrie betrachtet man die Nullstellenmengen polynomieller Gleichungen, $P(z_1, \dots, z_n) = 0$. Überraschendweise kann man den Spezialfall von Polynomen dritter Ordnung mit Hilfe der Differentialgleichung der $\wp$-Funktion analysieren. Er hat interessante Anwendungen in Zahlentheorie und Kryptographie.

Beispiel. Sind a, b reell, so liegt die Nullstellenmenge C_P von $P(x,y) := y^2 - 4x^3 + ax + b$ in $\mathbb{R}^2$ symmetrisch zur x-Achse. Wenn die Diskriminante $a^3 - 27b^2$ nicht verschwindet, schneidet C die reelle Achse in einem oder drei Punkten (warum?).

Wegen der befriedigenderen Existenztheorie von Nullstellen von Polynomen ist es sinnvoll, die Nullstellenmenge im Komplexen zu betrachten. Mehr noch: Statt in $\mathbb{C}^n$ wird die Lösungsmenge im komplex projektiven Raum $P^n\mathbb{C}$ der gleichen Dimension betrachtet. Dadurch wird zum einen die Lösungsmenge kompakt, zum anderen kann man das Verhalten im Unendlichen genauer analysieren.

Wir führen die nötigen Begriffe ein. Unter der Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^n$,

$$z \sim w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{C}^* : z = tw.$$

ist ein Punkt $z \in \mathbb{C}^n$ zu jedem Punkt der komplexen Gerade tz äquivalent, $t \in \mathbb{C}^*$. Der *komplex projektive Raum* ist die Menge der Klassen

$$P^n\mathbb{C} := \big\{[z] : z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big\}.$$

Beispiele. 1. Man kann $P^1\mathbb{C}$ mit $\hat{\mathbb{C}}$ identifizieren, denn $[z,w] \mapsto w/z$ für $w \neq 0$ und $[0,w] \mapsto \infty$ ist bijektiv.
2. Der Raum $P^2\mathbb{C}$ besteht aus einer Kopie von $\mathbb{C}^2$, und zwar $\{(1,z,w) : (z,w) \in \mathbb{C}^2\}$ vereinigt mit der eindimensionalen Menge $\{(0,1,z) : z \in \mathbb{C}\}$ und dem Punkt $\{(0,0,1)\}$. Natürlich braucht man auch noch eine Topologie.
Entsprechend gibt es auch die reelle Variante $P^n\mathbb{R}$, die man sich als Antipodenidentifikation von $\mathbb{S}^{n+1}$ vorstellen kann.

Ein Polynom $P\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ heißt *homogen* vom Grad $d \in \mathbb{N}$, wenn $P(tz) = t^dP(z)$ gilt; alle Terme haben dann die Ordnung d. Ist P homogen, so hängen zwar die Werte vom Repräsentanten ab, jedoch ist die Nullstellenmenge $C_P := \{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\} \subset P^n\mathbb{C}$ davon unabhängig, also wohldefiniert. Hat man ein Polynom $P(z_1,\dots,z_n)$, so kann man es zu einem homogenen Polynom $Q(z_0,\dots,z_n)$ erweitern, indem man passend viele z_0-Potenzen ergänzt.

Beispiel. $P(x,y) = y^2-4x^3+ax+b$ kann man zu $Q(t,x,y) = ty^2-4x^3+axt^2+bt^3$ erweitern. Die Nullstellenmenge von $C_Q \subset P^2\mathbb{C}$ kann man leicht durch $C_P \subset \mathbb{C}^2$ beschreiben: $C_Q = \{[1,x,y] : (x,y) \in C_P\} \cup \{[0,0,1]\}$ (den hinzugefügten Punkt bestätigen wir im nächsten Satz).

Bemerkung. In unserem Fall mit $n = 2$ ist die Nullstellenmenge C_P von $P(x,y)$ komplex eindimensional in der Ebene $\mathbb{C}^2$, also eine Kurve. Betrachtet in $\mathbb{R}^4$ wäre sie reell zweidimensional, also eine Fläche. Entsprechend heißt C_Q eine *ebene projektive Kurve.*

Im Satz für implizite Funktionen wird eine implizit gegebene Gleichung lokal parametrisch gedeutet. Unsere elliptischen Kurven können wir explizit und global parametrisieren: Mit dem folgenden Satz erkennen wir die implizit gegebene Menge einer elliptischen Kurve als das parametrische Bild eines Torus.

Satz 44. *Die elliptische Kurve*

$$C_Q := \big\{[t,x,y] \in P^2\mathbb{C} : 0 = ty^2 - 4x^3 + axt^2 + bt^3\big\}$$

mit Diskriminante $a^3 - 27b^2 \neq 0$ läßt sich stetig und bijektiv parametrisieren durch

$$\varphi\colon T := \mathbb{C}/L \to C_Q \subset P^2\mathbb{C}, \qquad \varphi(z) = \begin{cases} [1, \wp(z), \wp'(z)], & z \notin L, \\ [0,0,1], & z \in L, \end{cases}$$

wobei L durch Lemma 42 gegeben ist.
Insbesondere ist C_Q eine abelsche Gruppe: Ist $Z = \varphi(z)$ und $W = \varphi(w)$, so ist

$$Z * W := \varphi\big(\varphi^{-1}(Z) + \varphi^{-1}(W)\big) = \varphi(z+w).$$

Stetigkeit müßte eigentlich genauer definiert werden mit Hilfe geeigneter Karten der Mannigfaltigkeit $P^n\mathbb{C}$.

Beweis. Weil sowohl $\wp$ wie $\wp'$ elliptisch sind, ist φ auf T wohldefiniert. Die Stetigkeit in $z \notin L$ ist klar aus der Stetigkeit der Komponentenfunktionen von φ. Aus den Laurententwicklungen $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + O(z^2)$ und $\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + O(z)$ um $z \in L$ folgt

$$\varphi(z) = [z^3, z + O(z^5), -2 + O(z^4)] \ \to \ [0,0,1] \qquad \text{für} \qquad z \to 0,$$

und damit die Stetigkeit in L.

Wir zeigen nun die Injektivität. Sei $\varphi(z) = \varphi(w)$. Wir müssen zeigen $z = w \bmod L$. Wegen Geradheit von $\wp$ gilt, dass z und $-z$ gleiche Werte haben; weil $\wp$ Ordnung 2 hat, müssen alle anderen Stellen auf andere Werte abbilden. Ist also nicht $z = w$ so folgt $-w = z \bmod L$. Aber wegen Ungeradheit von $\wp'$ gilt dann $\wp'(z) = -\wp'(w)$, so dass $\wp'(z) = 0$. Damit ist z Verzweigungspunkt, also Halbgitterpunkt und daher gilt $w = -z = z \bmod L$.

Wir kommen zur Surjektivität von φ. Wegen der Differentialgleichung der $\wp$-Funktion ist sicher $\varphi(T) \subset C_Q$. Sei nun $(1, x, y) \in C_Q$, also $y^2 = 4x^3 - ax - b$. Da $\wp$ surjektiv in $\hat{\mathbb{C}}$ ist, gibt es ein $z \in T$ mit $\wp(z) = x$. Dann gilt für $y_0 := \wp'(z)$, dass $y_0^2 = 4x^3 - ax - b = y^2$, also $y = \pm y_0$. Nun ist aber

$$\varphi(-z) = [1, \wp(-z), \wp'(-z)] = [1, \wp(z), -\wp'(z)] = [1, x, -y_0].$$

Also ist entweder $\varphi(z) = (1, x, y)$ oder $\varphi(-z) = (1, x, y)$. □

Bemerkungen. 1. Die Klasse 0 von L stellt das neutrale Element des Torus dar. Daher ist das Bild $[0,0,1]$ das neutrale Element der elliptischen Kurve.
2. Allgemein sind *elliptische Kurven* definiert als singularitätenfreie komplexe projektive Kurven, die topologisch Tori sind.

Man kann die Gruppenstruktur auf der elliptischen Kurve viel expliziter verstehen, indem man sie zunächst als Aussage über die $\wp$-Funktion formuliert:

Satz 45. *Für $z \neq w \in \mathbb{C}$ gilt das Additionstheorem*

$$\wp(z+w) = -\wp(z) - \wp(w) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2 \tag{52}$$

und speziell für $z = w$

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2$$

Beweis. Wir betrachten die elliptische Funktion

$$f(z) = \wp'(z) - a\wp(z) - b.$$

Wir wählen die Konstanten a, b so, dass $f(z) = f(w) = 0$. Dann gilt

$$\wp'(z) - a\wp(z) = \wp'(w) - a\wp(w) \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}. \tag{53}$$

Die Funktion f hat als Singularitäten nur in L Pole dritter Ordnung. Nach dem Abelschen Theorem 37 hat f in P eine dritte Nullstelle ξ, und es gilt $z + w + \xi = 0 \bmod L$, d.h. die dritte Nullstelle lautet $\xi = -z - w \bmod L$. Also gilt

$$0 = f(-z-w) = \wp'(-z-w) - a\wp(-z-w) - b = -\wp'(z+w) - a\wp(z+w) - b.$$

Fassen wir zusammen:

$$\wp'(z) = a\wp(z) + b, \qquad \wp'(w) = a\wp(w) + b, \qquad -\wp'(z+w) = a\wp(z+w) + b, \tag{54}$$

insbesondere gilt $(\wp')^2 = (a\wp + b)^2$ für die drei Argumente $z, w, z+w$.

Andererseits gilt nach der Differentialgleichung auch $0 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 - (\wp')^2$, insbesondere für $z, w, z+w$. Die drei Zahlen $\wp(z), \wp(w), \wp(z+w)$ sind also die Nullstellen des Polynoms

$$R(t) := 4t^3 - g_2 t - g_3 - (at+b)^2,$$

d.h. wir haben die Faktorisierung

$$R(t) = 4\big(t - \wp(z)\big)\big(t - \wp(w)\big)\big(t - \wp(z+w)\big);$$

dabei müssen wir voraussetzen, dass die Zahlen $\wp(z), \wp(w), \wp(z+w)$ verschieden sind. Durch Vergleich des Koeffizienten von t^2 in den letzten beiden Darstellungen erhalten wir

$$4\big(\wp(z) + \wp(w) + \wp(z+w)\big) = a^2.$$

Wegen (53) ist das genau das Additionstheorem. Die Verdoppelungsformel folgt durch $w \to z$. $\square$

Wir halten noch zwei Folgerungen aus (54) fest, die die Gruppenstruktur konkreter machen.

Korollar 46. (*i*) *Wenn $U \neq V \in C_Q$ auf einer Sekante mit Gleichung $Z_2 = aZ_1 + b$ liegen, dann liegt $U * V$ auf der gespiegelten Sekanten $-Z_2 = aZ_1 + b$; entsprechendes gilt im Falle $U = V$ für die Tangente.*
(*ii*) *Wenn $U \neq V \in C_Q$ Punkte mit rationalen Koordinaten sind, so hat auch $U * V$ rationale Koordinaten.*

Die erste Aussage zeigt, dass die Addition auf der elliptischen Kurve ohne Bezug auf die Parametrisierung φ geometrisch beschrieben werden kann. Die Aussage gilt auch für reelle U und V, in welchem Fall man eine hübsche Skizze machen kann. Man müßte natürlich noch erläutern, dass Geraden in $P^2\mathbb{C}$ wohldefiniert sind.

Bei Aussage (*ii*) sollen rationale Koordinaten in $P^2\mathbb{C}$ bedeuten, dass es einen Repräsentanten mit rationalen Koordinaten gibt. Falls die erste Koordinate nicht verschwindet, können wir also einen Punkt U durch $[1, U_1, U_2]$ mit U_1, U_2 rational repräsentieren.

Beweis. (*ii*) Für $W := U * V$ und Koordinatendarstellungen wie zuvor folgt aus (52)

$$W_1 = -U_1 - \frac{1}{4}\left(\frac{U_2 - V_2}{U_1 - V_1}\right)^2 V_1$$

sowie aus (54)

$$-W_2 = \frac{U_2 - V_2}{U_1 - V_1}(W_1 - U_1) + U_2.$$

Weil diese Gleichungen nur rationale Operationen enthalten, ist mit U, V rational auch W rational. □

Die Zahlentheorie interessiert sich für rationale Punkte auf algebraischen Kurven. Beispielsweise ist das Fermatsche Problem, also die Frage nach natürlichen Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n \geq 3$ äquivalent zur Frage ob $P(u, v) := u^n + v^n - 1$ rationale Lösungen besitzt (dividiere durch z). Im elliptischen Fall hängt es von der Kurve ab, ob sie endlich oder unendlich viele rationale Punkte enthält. Aber in jedem Fall bilden die rationalen Punkte laut (*ii*) eine Abelsche Gruppe.

Mordell hat vermutet, dass, anders als im elliptischen Fall, Kurven vom Geschlecht größer als eins nur endlich viele rationale Punkte besitzen. Faltings konnte dies 1983 beweisen und erhielt dafür als bisher einziger deutscher Mathematiker die Fields-Medaille.

In der Kryptographie interessiert man sich für den Fall endlicher Körper mit vielen Elementen. Auch auf diesen Fall dehnt sich die Gruppenstruktur aus. Daher gibt es auf elliptischen Kurven basierende Verschlüsselungsverfahren, praktisch die einzige Alternative zu dem auf der Primzahlzerlegung basierenden RSA-Verfahren. Siehe dazu beispielsweise das Buch von Buchmann.

4.9. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 37 – Gitter:

a) Entscheide: Ist $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $a, b \in \mathbb{C}$, so ist auch aL und $L + b$ ein Gitter.

b) Sei L ein Gitter. Gib echte Teilmengen von L an, die ebenfalls Gitter sind.

c) Seien L und M Gitter. Sind dann $L \cup M$ und $L \cap M$ Gitter?

Aufgabe 38 – Eine ebene kristallographische Gruppe:

a) Wie sieht das Periodenparallelogramm eines Gitters $L \subset \mathbb{C}$ aus, das durch die Kanten eines gleichseitigen Dreiecks aufgespannt wird?

b) Beschreibe sämtliche Drehungen und sämtliche Spiegelungen, die das Gitter L in sich abbilden. Trage dazu am einfachsten Fixpunkte und Ordnung der Drehung in das Parallelogramm ein, bzw. die Achse der Spiegelungen.

Aufgabe 39 – Vierfarbensatz auf dem Torus?:

Betrachte eine Pflasterung der Ebene mit regelmäßigen Sechsecken. Passendes Sechseckspapier wird dazu gestellt. Finde ein Gitter, so dass a) sieben Sechsecke einen Fundamentalbereich bilden. Das heißt also, dass sich das Periodenparallelogramm aus sieben, teils zerschnittenen, Sechsecken zusammensetzt. Weiter verlangen wir, dass b) jedes Sechseck im Fundamentalbereich jedes andere in (genau) einer Kante berührt.
Wie viele Farben braucht man also mindestens, um Karten auf dem Torus so einzufärben, dass Polygone, die Kanten gemeinsam haben, verschieden gefärbt sind?

Aufgabe 40 – Identifizierung von Polygonkanten:

a) Betrachte ein gleichseitiges Polygon mit $2k$ Kanten. Es ist von sinnvoll eine Ecke in den Ursprung zu legen. Gibt es außer dem Quadratfall $k = 2$ noch ein weiteres $k > 2$, so dass das Identifizieren gegenüberliegender Kanten ein Gitter erzeugt?

b) Man kann auch kompakte Flächen von höherem Geschlecht g durch Identifikation der Kanten eines Polygons erzeugen. Bestimme z.B. für $g = 2$ ein Polygon und seine Seitenidentifizierungen.
Tipp: Eine Möglichkeit ist, eine symmetrische Version der Fläche in vier Sechsecke zu zerlegen. Alle benötigten Randkurven liegen in Symmetrieebenen der Fläche.

Aufgabe 41 – Reihenkonvergenz:

Zeige durch Integralvergleich: Die Reihe

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(m^2+n^2)^s}$$

konvergiert für $s > 1$.

Aufgabe 42 – Diskrete Untergruppen der additiven Gruppe:

Beweise: Jede diskrete Untergruppe L von $(\mathbb{R}^n, +)$ ist von der Form

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_k$$

mit $0 \le k \le n$ und $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängigen Vektoren.

Aufgabe 43 – Rechteckige und rhombische Gitter:

Ein Gitter L heißt *spiegelsymmetrisch*, wenn gilt: $\omega \in L \Leftrightarrow \overline{\omega} \in L$.

a) Zeige: Rechteckige und rhombische Gitter sind spiegelsymmetrisch. Dabei heisst L *rechteckig*, wenn $L = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_2'$ mit $\omega_1, \omega_2' \in \mathbb{R}$, und *rhombisch* wenn gilt $L = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\overline{\omega}$ mit $\omega \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ (Bild!).

b) Sei L_0 die von reellen und rein imaginären Vektoren in L erzeugte Untergruppe. Zeige: Ist L spiegelsymmetrisch, so ist $L_0 \subset L$ ein Gitter.

c) Zeige nun die Umkehrung von a): Ein spiegelsymmetrisches Gitter ist rechteckig oder rhombisch.
Tipp: Sei $L_0 = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_2'$ wie in b), und P das zugehörige Periodenrechteck. Dann zeige im Fall $L \neq L_0$, dass $\omega \in (L \setminus L_0) \cap P$ erfüllt $2\omega = \omega_1 + i\omega_2'$.

Aufgabe 44 – Spiegelsymmetrische Funktionen:

Eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ heißt *spiegelsymmetrisch*, wenn $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Ein Paar von Spiegelpunkten im Urbild besitzt also Bildpunkte, die durch Spiegelung auseinander hervorgehen.

a) Prüfe, welche holomorphen Funktionen spiegelsymmetrisch sind: Polynome, exp, sin, cos, ... (Vermutung dazu und Beweis?)

b) Zeige: Spiegelsymmetrische Funktionen nehmen auf $\mathbb{R}$ reelle Werte an. Auf $i\mathbb{R}$ nehmen die geraden spiegelsymmetrischen Funktionen reelle Werte an.

c) Zeige: Die $\wp$-Funktion ist genau dann spiegelsymmetrisch, wenn das Gitter L spiegelsymmetrisch ist.
Tipp: Für die eine Richtung hilft die Betrachtung der Polstellenmenge von $\wp$.

Aufgabe 45 – Abbildungsverhalten der $\wp$-Funktion für Rechtecksgitter:

Es sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 + i\mathbb{Z}\omega_2'$ ein rechteckiges Gitter und $Q := \{s\omega_1 + it\omega_2' \colon 0 < s, t < 1/2\}$ ein Viertel des Periodenparallelogramms. Weisen Sie die folgenden Behauptungen nach:

a) Auf den Mittellinien des Parallelogramms ist $\wp$ reellwertig, d.h. es gilt $\wp(x + i\omega_2') \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\wp(iy + \omega_1/2) \in \mathbb{R}$ für $y \in \mathbb{R}$.

b) Umrunden wir von 0 aus den Rand ∂Q, so durchlaufen die Bildwerte monoton die ganze reelle Achse.

   Tipp: Wo liegen die Verzweigungspunkte (oder kritischen Punkte) von $\wp$?

c) Läuft man von 0 aus entgegen dem Uhrzeiger durch ∂Q, so läuft das Bild von ∞ bis $-\infty$.

   Tipp: Betrachte den Term $1/z^2$ um 0.

d) Zeige: Innerhalb von Q nimmt $\wp$ jeden Wert der unteren Halbebene $-H$ genau einmal an, d.h. $\wp \colon Q \to -H$ ist biholomorph. Markiere in P, ob die Werte in H oder in $-H$ liegen. Erläutere das Ergebnis aus der Perspektive des Riemannschen Abbildungssatzes.

Bemerkung: Das Vorgehen dieser Aufgabe läßt sich umdrehen: Man konstruiert zuerst eine Abbildung $Q \to -H$ mit dem Riemannschen Abbildungssatz und setzt die erhaltene Abbildung dann mit dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip glatt über die Ränder fort. Dies liefert eine doppelt periodische Funktion. Tatsächlich läßt sich so die $\wp$-Funktion für alle rechteckigen Tori rekonstruieren. Siehe Fischer-Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, S. 242 f oder mein Minimalflächenskript, Teil 4 Kapitel 2.4.

Aufgabe 46 – Eine einfache elliptische Funktion:

Wir konstruieren eine elliptische Funktion f mit zwei einfachen Polen als Singularitäten. Am einfachsten legt man die Pole in die Punkte $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und $L + (\omega_1 + \omega_2)/2$.

a) Wohin würde man die Nullstellen von f legen? Gibt es weitere Möglichkeiten?

b) Nehmen wir zusätzlich an, dass L rechteckig ist. Wie kann man f durch $\wp$ und $\wp'$ darstellen?

Aufgabe 47 – Wiederholungsfragen:

a) Definiere Gitter und elliptische Funktionen.

b) Welchen Einschränkungen genügen die Positionen von Null- und Polstellen?

c) Was ist die Ordnung einer elliptischen Funktion? Sind alle Ordnungen möglich?

d) Welche Eigenschaften charakterisieren die $\wp$-Funktion?

e) Warum sind beliebige elliptische Funktionen als rationale Funktionen in $\wp$ und $\wp'$ darstellbar? Wann speziell sogar als Polynom in $\wp$?

f) Warum erfüllt $\wp'^2$ eine Differentialgleichung und welche Konsequenzen kann man daraus ziehen?

Ende der Vorlesung

Index