Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
13. Juli 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Schätzverfahren)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch $R(\theta - 1, \theta + 1)$-verteilt, mit $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt.

a) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Berechnen Sie die Varianz des Schätzers T_n.
Hinweis: $X \sim R(a, b) \Rightarrow Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

c) Ist die Schätzerfolge $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für $\tau(\theta) = \theta$?

Aufgabe G2 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Um die Präzision einer Waage zu überprüfen, wird n-mal das Gewicht eines Kilogramm-Prototyps gemessen. Die entstehende Messreihe soll als Realisierung von unabhängigen, identisch $N(1, \theta)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekannter Varianz $\theta > 0$ aufgefasst werden.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

b) Ist T_n erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$?

Hinweis: Die Dichte der $N(\mu, \sigma^2)$ Verteilung ist gegeben durch $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G3 (Konfidenzintervalle)

Bei der Größenmessung in einer Gruppe von 9 Personen ergaben sich folgende Körpergrößen [in cm]:

`184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4.`

Diese Messwerte werden als Realisationen der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_9$ angenommen, die unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt seien.

(a) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für den Erwartungswert μ an, falls die Standardabweichung bekannt ist und $\sigma = 2.4$ [cm] beträgt.

(b) Welches Konfidenzintervall ergibt sich in (a) für dasselbe Konfidenzniveau, falls die Standardabweichung als unbekannt angenommen wird?

(c) Ermitteln Sie im letzteren Fall ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für die Varianz σ^2.

(d) Formulieren Sie in eigenen Worten, was Ihre Resultate aus den ersten drei Aufgabenteilen besagen.

Aufgabe G4 (Konfidenzintervalle für Defektwahrscheinlichkeiten)

Man ist an einem Konfidenzintervall für die Defektwahrscheinlichkeit $\theta \in (0,1)$ eines Produktionsprozesses interessiert. Um die Anzahl defekter Produkte in einer Stichprobe vom Umfang n zu zählen verwenden wir unabhängig identisch $B(1,\theta)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots X_n$, wobei $X_i = 1$ für $i = 1, \ldots n$, falls das i-te Produkt defekt ist. Die Anzahl defekter Produkte in der Stichprobe, also die Summe $Y = X_1 + \ldots X_n$, ist dann aufgrund der Unabhängigkeitsannahme $B(n,\theta)$-verteilt.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$P_\theta\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{Y - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P_\theta\left((Y-n\theta)^2 \leq u^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot n\theta(1-\theta)\right) \approx 1-\alpha\,.$$

(b) Folgern Sie daraus, dass θ mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ im Konfidenzintervall

$$I(X_1, \ldots X_n) = \left[\frac{1}{n + u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(Y + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Y(1-\frac{Y}{n}) + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4}}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{n + u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(Y + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Y(1-\frac{Y}{n}) + \frac{u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{4}}\right)\right]$$

liegt.

(c) Ein Hersteller von Elektrogeräten möchte eine grössere Lieferung Transistoren auf ihre Qualität testen. Dazu überprüft er 400 zufällig ausgewählte Transistoren, von denen 12 nicht den Qualitätsanforderungen genügen. Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für die Ausschusswahrscheinlichkeit zum Niveau 0.95.

Aufgabe G5 (Testverfahren)

Eine bestimmte Weizensorte wird auf 9 vergleichbaren, gleich großen Versuchsflächen angebaut. Aus Erfahrung weiß man, dass die Erträge der einzelnen Versuchsflächen als eine Stichprobe unabhängiger, identisch $N(\mu, 3.24)$-verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können. Es ergibt sich ein arithmetisches Mittel von 105.0 [dz].

a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu = 106.0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$.

b) Welche Entscheidung würde sich auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ ergeben?

c) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 106.0$ auf dem Niveau $\alpha = 0.01$.

d) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 106.0$ auf dem Niveau $\alpha = 0.01$.

Aufgabe G6 (Testverfahren)

Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine bestimmte Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen. Es ergaben sich folgende Meßwerte (in m):

998.0 1001.0 1003.0 1000.5 999.0 997.5 1000.0 999.5 996.0 998.5

Es wird angenommen, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilter Zufallsvariablen sind.

a) Überprüfen Sie zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät mindestens die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.

b) Überprüfen Sie unter der Voraussetzung, dass $\sigma^2 = 4$ gilt, zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(10)} = 999.3$ und $S^2_{(10)} = 3.9$.