Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
12. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
06. Juli 2011

ACHTUNG: Die Hausaufgaben können in der nächsten Woche abgegeben werden. Die korrigierten Hausübungen können in der ersten Ferienwoche abgeholt werden. Beachten Sie dazu unsere Webseite.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Erwartungswert und Varianz, stetige Zufallsvariablen)

Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimme die Verteilungsfunktion von X.

b) Ermittle die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen X^2.

c) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe G2 (Binomialverteilung, Poissonverteilung, diskrete Zufallsvariable)

a) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimme die Verteilung von X sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.

b) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechne für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

Aufgabe G3 (Normalverteilung)

a) Wir gehen von einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus (kurz: $Y \sim N(0,1)$, auch als Standardnormalverteilung bezeichnet) und betrachten die Zufallsvariable $Z = 5 \cdot Y + 100$. Man kann zeigen, dass Z wieder normalverteilt ist. Überprüfe, dass $E(Z) = 100$ und $Var(Z) = 25$ gilt.

b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Größe (in mm) einer bestimmten Pflanze im Alter von 30 Tagen. Es wird angenommen, dass X normalverteilt ist mit Erwartungswert 100 und Varianz 25, also $X \sim N(100,25)$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
(i) $P(90 \leq X \leq 110)$ und (ii) $P(X > 107)$.
Nutze dabei die Ergebnisse aus a).

Hausübung

Aufgabe H1 (Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung, zentraler Grenzwertsatz)

Der Durchmesser neu produzierter Autokolben werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable X angemessen beschrieben. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von X ($\mathrm{Var}(X) = 0.04(mm^2)$), der Erwartungswert ist jedoch unbekannt. Es soll die Mindestanzahl von durchzuführenden Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 kleiner als $0.1(mm)$ ist.

(a) Bestimme eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung. Benutze dabei den zentralen Grenzwertsatz, um die Verteilung von $\bar{X}_{(n)}$ zu bestimmen.

(b) Bestimme die gesuchte Anzahl exakt. Transformiere dazu (an geeigneter Stelle) auf Standardnormalverteilung und benutze die entsprechende Tabelle.

Aufgabe H2 (Exponential- und Binomialverteilung)

In einem Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunde) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

Aufgabe H3 (Erwartungswert und Varianz)

Die Zufallsvariable X habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 3c, & \text{falls } x \in \{1,4\}; \\ 2c, & \text{falls } x \in \{2,3\}; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit einer gewissen Konstanten c.

a) Bestimmen Sie die Konstante c und die Verteilungsfunktion von X.

b) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

c) Es sei $Y = 2X - 1$ und $Z = \frac{X-2}{\sqrt{5}}$. Berechnen Sie $E(Y)$, $E(Z)$, $Var(Y)$ und $Var(Z)$.