Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
29. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zweidimensionale Messreihen)

Im Vorfeld der Fußball-Weltmeisterschaft der Frauen bringt ein Fachmagazin ein Sonderheft mit den Steckbriefen der Spielerinnen heraus. Diese enthalten neben Informationen zu Alter, Position und Vereinszugehörigkeit auch Angaben zu Größe und Gewicht. Bei der Erhebung der Daten erhielt man folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
Größe (in cm): x_i	174	170	172	167	170	175
Gewicht (in kg): y_i	69	64	68	57	63	71

a) Stellen Sie die Messergebnisse in einem Punktediagramm dar.

b) Ein Teil der Steckbriefe ist nicht ganz vollständig. Bei manchen fehlt die Angabe zum Körpergewicht. Um trotzdem einen Wert im Heft angeben zu können, möchten die Redakteure durch lineare Regression einen plausiblen Wert für das Gewicht aus der Körpergröße ermitteln.

   Berechnen Sie die empirischen Streuungen, die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten dieser zweidimensionalen Messreihe. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Größe und Gewicht hier gerechtfertigt? Warum?

c) Wir nehmen nun an, ein linearer Zusammenhang sei begründet. Berechnen Sie die Regressionsgerade zur Vorhersage des Gewichts an Hand der Größe einer Fußballspielerin und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm.

d) Bestimmen Sie einen Vorhersagewert für das Gewicht einer Fußballspielerin bei einer Größe von 168 cm.

e) Eine weitere Fußballspielerin ist 155 cm groß und wiegt 84 kg. Betrachten Sie nun die um dieses Wertepaar erweiterte Messreihe. Beurteilen Sie anhand geeigneter statistischer Maßzahlen, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Größe und Gewicht von Fußballspielerinnen gerechtfertigt ist.

Runden Sie Ihre Ergebnisse dabei auf vier Stellen nach dem Komma.

Aufgabe G2 (Kombinatorik)

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, vier davon heißen Buben. Nach dem Mischen der Karten erhalten die drei Spieler (Alex, Bodo und Carl) jeweils zehn Karten. Die verbleibenden zwei Karten bilden den sogenannten Skat. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Mindestens ein Bube befindet sich im Skat.

B: Carl hat genau einen Buben.

C: Ein Spieler hat genau drei Buben.

D: Jeder Spieler besitzt mindestens einen Buben.

Aufgabe G3 (Verteilungsfunktion, Maßzahlen)

In einer Automobilfabrik wurden bei 20 Fahrzeugen eines Typs folgende Höchstgeschwindigkeiten gemessen:

$$141, 142, 143, 144, 147, 144, 144, 138, 140, 141, 145, 148, 150, 151, 152, 150, 145, 146, 147, 151,$$

(a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe.

(b) Zeichnen Sie ein Histogramm mit Klasseneinteilung

$$(v-1, v+1], \qquad v = 138,\ 140,\ 142,\ 144,\ 146,\ 148,\ 150,\ 152.$$

(c) Berechnen Sie den Median, das arithmetische Mittel, das p-Quantil für $p = 0.25$ und $p = 0.75$, die empirische Varianz und die empirische Streuung.

(d) Angenommen bei der Übertragung der Messdaten ist ein Fehler passiert und es wurde bei einer der Messungen statt 145 km/h 345 km/h übertragen. Welche Auswirkung hat das auf die in Aufgabe (c) berechneten Maßzahlen?

Aufgabe G4 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

An der TU Darmstadt studieren ca. 22.500 Personen. Davon sind 6 500 weiblich und 16 000 männlich. Dabei studieren 6.8% der Studentinnen und 4.8% der Studenten Mathematik. Ein Student (m/w) werde zufällig ausgewählt. Sei A das Ereignis, dass die Person Mathematik studiert, und B, dass sie weiblich ist.

a) Wie groß ist $P(A|B)$?

b) Wie groß ist der relative Anteil der Mathematik-Studenten (m/w)?

c) Wie groß ist $P(B|A)$?

d) Sind A und B unabhängig?

Hausübung

Aufgabe H1 (Zweidimensionale Messreihen)

Eine Strecke wurde an 15 verschiedenen Tagen und zu unterschiedlichen Tageszeiten mit dem gleichen Fahrzeug abgefahren. Dabei wurde jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit v_i (in km/h) und die Verkehrsdichte d_i (in Anzahl Fahrzeuge pro km) ermittelt. Dies ergab die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_i	29	40	42	47	50	56	57	60	60	62	63	67	69	74	82
d_i	40	37	34	30	25	19	23	21	13	16	21	13	16	11	7

(a) Stellen Sie die beobachteten Daten zunächst in einem Punktediagramm graphisch dar und berechnen Sie dann den empirischen Korrelationskoeffizienten.

(b) Die Ergebnisse von Teil (a) legen nahe, dass der Zusammenhang zwischen Durchschnittsgeschwindigkeit v und Verkehrsdichte d durch eine Gerade beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Regressionsgerade

$$d = \hat{a}v + \hat{b}$$

zur Messreihe (v_i, d_i), $i = 1, \dots, 15$ und zeichnen Sie diese in das Punktediagramm ein.

(c) Da die Durchschnittsgeschwindigkeit leichter zu ermitteln ist als die Verkehrsdichte, sollen mit Hilfe der in Teil (b) berechneten Regressionsgerade Schätzwerte für die Verkehrsdichte bestimmt werden. Geben Sie den Schätzwert für die Verkehrsdichte bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 55 km/h an.

Aufgabe H2 (Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit)

Eine Firma möchte ihren Kunden den Zugriff auf ihre persönlichen Daten über das Internet ermöglichen. Für den Zugang müssen die Kundennummer und eine PIN eingegeben werden. Nachdem die PIN dreimal hintereinander falsch eingegeben wurde, wird der Zugang gesperrt und der Kunde informiert.

(a) Angenommen einem Hacker sei die Kundennummer bekannt und er probiert nun zufällig gewählte PINs aus. (Jede PIN wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt.) Wieviele Stellen muss die PIN mindestens haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Hackerangriff unbemerkt bleibt, höchstens 10^{-6} ist?

(b) Wieviele Stellen wären nötig, wenn anstelle der PIN ein Passwort verwendet würde? Dabei soll das Passwort aus Buchstaben (ohne Umlaute) und Ziffern bestehen, wobei Groß- und Kleinschreibung nicht beachtet wird.

Aufgabe H3 (Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit)

Sepp, Hinz und Kunz schauen zusammen ein Fussball-WM-Spiel. Für den Fall, dass das Bier nicht reichen sollte, haben sie das folgende Verfahren verabredet um denjenigen zu ermitteln, der Nachschub besorgen muss:

Zunächst werfen Hinz und Kunz eine Münze. Zeigt diese Zahl, scheidet Hinz aus bei Kopf Kunz. Dann werfen Sepp und der Nichtausgeschiedene eine Münze. Ist das Ergebnis Zahl, dann muss Sepp das Bier holen ansonsten der Nichtausgeschiedene.

(a) Wählen Sie eine Bezeichung für die Ergebnisse des im Verfahren durchgeführten Zufallsexperiments und geben Sie die Ergebnismenge an.

(b) Geben Sie dann die Ereignisse

A_1 : Sepp muss Bier holen.
A_2 : Hinz muss Bier holen.
A_3 : Kunz muss Bier holen.

mit Hilfe der in (a) gewählten Bezeichnung an. Welche dieser Ereignisse sind Elementarereignisse?

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_3)$. Ist das Verfahren gerecht?

Aufgabe H4 (Standardabweichung)

a) Gegeben sei eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ mit dem arithmetischen Mittel $\overline{x}$ und der empirischen Varianz s_x^2. Außerdem seien zwei reelle Konstanten $a \neq 0$ und b fest vorgegeben. Zeigen Sie:
Bei linearer Transformation der Messreihe gemäß $y_i = a \cdot x_i + b,\ i = 1, \ldots, n$, gilt für das arithmetische Mittel $\overline{y}$ der transformierten Werte $\overline{y} = a \cdot \overline{x} + b$, sowie für die empirische Varianz $s_y^2 = a^2 s_x^2$.

b) In Brighton an der Südküste Englands wurden während der Weihnachtsferien die folgenden Tagestiefsttemperaturen $x_i,\ i = 1, \ldots, 10$, in Grad Fahrenheit gemessen:

31 27 28 26 30 36 35 34 31 30

Berechnen Sie anhand der Informationen $\sum_{i=1}^{10} x_i = 308$ und $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 9588$ die mittlere Tagestiefsttemperatur und die empirische Streuung sowohl in Grad Fahrenheit als auch in Grad Celsius.
(Hinweis: x Grad Fahrenheit entsprechen $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ Grad Celsius.)