

# Mathematik IV f. Elektrotechnik

## Mathematik III f. Informatik

### 10. Übungsblatt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Prof. Dr. Stefan Ulbrich  
Dr. Lucia Panizzi  
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011  
22. Juni 2011

#### Gruppenübung

##### Aufgabe G1 (Inverse Vektoriteration nach Wielandt)

Es soll der kleinste Eigenwert der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden.

- Führe zwei Iterationen nach Wielandt mit  $\mu = -8$  und  $z^{(0)} = (1, 0)^T$  aus (d. h. berechne  $z^{(2)}$  und  $R(z^{(1)}, (A - \mu I)^{-1})$  sowie  $\mu + \frac{1}{R(z^{(1)}, (A - \mu I)^{-1})}$  als Näherung für den kleinsten Eigenwert).
- Berechne die Eigenwerte von  $A$  und vergleiche diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).

##### Aufgabe G2 (Konvergenz des QR-Verfahrens)

Gegeben sind die regulären Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 32 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 100 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -150 \end{pmatrix}$$

Überprüfe jeweils, ob die Eigenwerte betragsmäßig getrennt sind indem du die Beträge mit Hilfe von Gershgorin-Kreisen abschätzt, und gib für beide Matrizen eine Abschätzung für den Wert  $q$  aus Satz 7.3.2 an. Für welche der beiden Matrizen würde man anhand der Abschätzungen eine schnellere Konvergenz erwarten? Worauf ist dies zurückzuführen?

##### Aufgabe G3 (Shift-Strategie beim QR-Verfahren)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Berechne die Eigenwerte von  $A$  und gib den Wert von  $q$  aus Satz 7.3.2 an.
- Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und berechne hieraus mit der im Skript beschriebenen Vorgehensweise einen Shift  $\mu$ .

- (c) Berechne die Eigenwerte der Matrix  $A - \mu I$  und den Wert von  $q$  aus Satz 7.3.2. Ein Eigenwert der Matrix  $A - \mu I$  ist durch 1.27 gegeben.
- (d) Interpretiere deine Ergebnisse. Was hat der Shift in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit bewirkt?

*Hinweis:* Insbesondere bei Aufgabenteil c) ist es empfehlenswert, die Eigenwerte nicht von Hand, sondern z.B. mit Matlab zu berechnen.

Runde alle (Zwischen-)Ergebnisse in dieser Aufgabe auf zwei Dezimalstellen.

## Hausübung

### Aufgabe H1 (Verteilungsfunktion, Histogramm)

Auf einem Flughafen wurde an 29 aufeinanderfolgenden Tagen jeweils um 8:00 Uhr die Windgeschwindigkeit gemessen. Es wurden folgende Werte gemessen:

7.4 8.0 12.6 11.5 14.3 14.9 8.6 13.8 20.1 8.6 6.9 9.7 9.2 10.9 13.2  
 11.5 12.0 18.4 11.5 9.7 9.7 16.6 9.7 12.0 16.6 14.9 8.0 12.0 14.9

- (a) Skizziere die empirische Verteilungsfunktion der angegebenen Messreihe und zeichne ein Histogramm mit folgender Klasseneinteilung:

(5.0, 7.0] (7.0, 9.0] (9.0, 11.0] ... (19.0, 21.0]

- (b) Berechne das arithmetische Mittel, den Median und die empirische Varianz.

### Aufgabe H2 (Multiple Choice)

Es darf pro Frage eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

- (a) Das QR-Verfahren mit der Shift-Strategie aus dem Skript angewendet auf eine Matrix  $A$  verbessert die Konvergenzgeschwindigkeit für

- die erste Zeile der Matrix.  
 die vorletzte Zeile der Matrix.  
 die letzte Zeile der Matrix.

- (b) Betrachte die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der betragsmäßig größte Eigenwert soll jeweils durch die Vektoriteration nach von Mises angenähert werden. Für welche Matrix würde man, einen geeigneten Startwert vorausgesetzt, eine schnellere Konvergenz des Rayleigh-Quotienten gegen den Eigenwert erwarten?

- Für  $A_1$ .  
 Für  $A_2$ .  
 Die Konvergenzgeschwindigkeit ist für beide Matrizen gleich.