Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
15. Juni 2011

Wichtige Informationen zur Prüfungsanmeldung

Die Anmeldung zur Modulprüfung am 21.09.2011 hat begonnen. Wenn Sie an der Prüfung teilnehmen möchten, melden Sie sich bitte bis zum 30. Juni über TUCaN zur Prüfung an.

Sollten Sie bereits in einem früheren Semester für die Mathe III f. Inf./Mathe IV f. ET angemeldet gewesen sein, so finden Sie den Link zur Prüfung über das entsprechende Semester. Dies gilt insbesondere auch für die Wiederholer, die sich im SoSe11 nicht für die Veranstaltung anmelden konnten. Die Prüfungsanmeldung über das jeweilige (*alte*) Semester funktioniert!

Bitte melden Sie auf **keinen Fall** die Prüfung über "Zusätzliche Leistungen" an!

Alle notwendigen Informationen finden Sie auch unter

`http://www.info.tucan.tu-darmstadt.de/studium/anleitung/pruefung/`

Die Anmeldung zur Vordiplomsprüfung "Mathematik B" erfolgt über das Studienbüro Ihres Fachbereichs.

Bei Problemen und Fragen zur Prüfungsanmeldung ist das Studienbüro an Ihrem Fachbereich der richtige Ansprechpartner.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gershgorin-Kreise)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4+5i & 2 & -i & 3+4i \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die zur Matrix A gehörigen Gershgorin-Kreise in der komplexen Zahlenebene.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und zeichnen Sie diese in die Skizze ein.

Aufgabe G2 (Störungstheorie für Eigenwertprobleme)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.
b) Schätzen Sie die Eigenwerte der Matrix $C := A + B$ mit dem Störungssatz 7.1.5 der Vorlesung ab.

Aufgabe G3 (Vektoriteration nach von Mises)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Verfahren nach von Mises ist ein einfaches Vektoriterationsverfahren (vgl. Definition 7.2.1) bei dem die Matrix B gleich A gewählt wird.

(a) Führen Sie vier Iterationen nach von Mises mit dem Startvektor $z^{(0)} = (1,1)^T$ durch (d. h. berechne $z^{(4)}$ und $R(z^{(3)},A)$). Verwenden Sie zur Normierung die Maximumsnorm.
(b) Berechenen Sie die Eigenwerte von A und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).
(c) Was folgt aus Satz 7.2.2 über die Güte der Approximation?

Hausübung

Aufgabe H1 (Vektoriteration nach von Mises)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie drei Iterationen nach von Mises mit dem Startvektor $z^{(0)} = (1,0,0)^T$ durch (d. h. berechnen Sie $z^{(3)}$ und $R(z^{(2)},A)$). Verwenden Sie zur Normierung die Maximumsnorm.
(b) Berechenen Sie die Eigenwerte von A und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus Teil (a).

Aufgabe H2 (Gershgorin-Kreise)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die zur Matrix A gehörenden Gershgorin-Kreise.
(b) Bestimmen Sie die zur Matrix A^T gehörenden Gershgorin-Kreise.
(c) Verbessern Sie Ihre Abschätzung der Eigenwerte von A, indem Sie die Ergebnisse aus den beiden letzten Aufgabenteilen kombinieren.
Hinweis: In welchem Verhältnis stehen die Spektren von A und A^T zueinander?

Aufgabe H3 (Gershgorin-Kreise und Bauer/Fike)

Gegeben sei die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die zur Matrix $\tilde{A}$ gehörenden Gershgorin-Kreise.

(b) Stellen Sie die Matrix $\tilde{A}$ als $\tilde{A} = A + \Delta A$ mit geeigneten Matrizen A und ΔA dar und bestimmen Sie eine Näherung für das Spektrum $\sigma(\tilde{A})$ mit Hilfe des Satzes von Bauer/Fike.

(c) Zeichnen Sie die Ergebnisse aus den beiden ersten Aufgabenteilen und vergleichen Sie die Ergebnisse.