Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
8. Juni 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Stabilitätsbereich)

Es soll gezeigt werden, daß das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4) nicht L-stabil ist. Zeige dazu, dass

(a) das Polynom

$$R(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 + \frac{1}{24}q^4$$

die Stabilitätsfunktion des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ist und

(b) die Beziehung

$$|R(q)| < 1 \quad \text{für alle } q \in \mathbf{C} \text{ mit } \Re(q) < 0$$

nicht gilt.

Aufgabe G2 (Ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren)

Betrachte das implizite Runge-Kutta-Verfahren, das durch das Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegeben ist.

Berechne die Stabilitätsfunktion des obigen Verfahrens und zeige, daß das Verfahren A-stabil ist.

Aufgabe G3 (Anfangswertproblem)

Gegeben sei das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des zugehörigen Runge-Kutta Verfahrens für das allgemeine Problem $y'(t) = f(t, y(t))$ um von $t_i, u_i \approx y(t_i)$ ausgehend u_{i+1} zu berechnen?

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t + 3y(t), \quad y(1) = 2.$$

Berechne mit dem oben beschriebenen Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweite $h = 1/2$ eine Näherung für $y(2)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Entladung eines Kondensators)

Wir betrachten die Entladung eines Kondensators der Kapazität C über einem Ohmschen Widerstand R. Der Schalter S werde zur Zeit $t = 0$ geschlossen; zu diesem Zeitpunkt sei die Spannung am Kondensator U_0. Bezeichnet man mit $U = U(t), t \geq 0$ die Spannung am Kondensator und mit $U_R(t)$ den Spannungsabfall am Widerstand R, so muss offenbar zu jedem Zeitpunkt t gelten:

$$U_R(t) + U(t) = 0,$$

wobei nach dem Ohmschen Gesetz $U_R(t) = R \cdot I(t)$ gilt für die Stromstärke $I(t)$. Die Elektrische Ladung des Kondensators ist $Q(t) = CU(t)$. Für einen idealen Kondensator gilt die Differenzialgleichung $I(t) = Q'(t)$. Damit erhält man für die Spannung $U(t)$ am Kondensator die folgende lineare Differenzialgleichung

$$U'(t) + \frac{1}{RC} U(t) = 0,$$

mit dem Anfangwert $U(0) = U_0$.

(a) Löse dieses Anfangswertroblem mithilfe der Trennung der Veränderlichen.

(b) Sei nun $U_0 = 1$, $R = 2$ und $C = \frac{1}{4}$. Berechne sowohl mit dem expliziten Eulerverfahren, als auch mit dem modifizierten Eulerverfahren (2.Runge-Kutta-Verfahren 2.Ordnung) jeweils mit Schrittweite $h = \frac{2}{3}$ Näherungswerte für die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems im Intervall $[0, 2]$.

(c) Beurteile Deine drei Näherungswerte, indem Du sie miteinander und mit der exakten Lösung vergleichst.

Aufgabe H2 (Butcher-Schema)

Betrachte das Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \gamma_2 & \frac{1}{3} & & \\ \gamma_3 & \frac{1}{3} & \alpha_{32} & \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Bestimme die Parameter $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_{32}, \beta_1$ und β_2 so, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren unter den Bedingungen

$$\gamma_i = \sum_j \alpha_{ij} \text{ für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad \gamma_3 = 2\gamma_2$$

höchstmögliche Konsistenzordnung besitzt. Gib das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren an.