Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
31. Mai 2011

Hinweis

Bitte beachten Sie, dass wegen des Feiertages am 2. Juni keine Übungen stattfinden. Die Übungen wurden verelegt. Weitere Informationen erhalten Sie auf unserer Webseite.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Butcher-Schema)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = t y(t), \quad y(0) = 1,$$

mit der exakten Lösung $y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, sowie das folgende zweistufige, explizite Runge–Kutta Verfahren mittels des dazugehörigen Butcher–Schemas

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}.$$

a) Berechnen Sie zu dem gegebenen Anfangswertproblem die Verfahrensfunktion des Runge–Kutta Verfahrens zu dem Butcher–Schema.

b) Berechnen Sie eine Näherung an $y(1)$ mit Schrittweite $\frac{1}{2}$ mit dem gegebenen Runge–Kutta Verfahren.

c) Geben Sie den (globalen) Diskretisierungsfehler des Runge–Kutta Verfahrens in $t = 1$ an.

Aufgabe G2 (Konsistenz des implizites Euler-Verfahrens)

Zeigen Sie, dass das implizite Euler–Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 1 ist.

Aufgabe G3 (Steife Differenzialgleichungen)

Es soll das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Es handelt sich hierbei um eine steife Differenzialgleichung.

(a) Schreiben Sie für das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Au_j$, wobei A eine 2×2-Matrix ist, und führen Sie drei Iterationsschritte aus.

(b) Schreiben Sie für das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Bu_j$, wobei B eine 2×2-Matrix ist, und führen Sie drei Iterationsschritte aus.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus Teil (a) und (b). Welches Verfahren beschreibt das qualitative Verhalten der gesuchten Funktion besser?

Hausübung

Aufgabe H1 (Konsistenz der impliziten Trapezregel)

Zeigen Sie, dass die implizite Trapezregel

$$u_{j+1} = u_j + \tfrac{h}{2}(f(t_j, u_j) + f(t_{j+1}, u_{j+1}))$$

zur Lösung eines Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [a, b],$$

wobei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sei, konsistent von der Ordnung 2 ist.
Hinweis: Benutzen Sie eine Taylorentwicklung für $y(t+h)$ der Ordnung 3 (also bis $\mathcal{O}(h^3)$) und für $f(t+h, y(t+h))$ der Ordnung 2 nach h in $h = 0$.

Aufgabe H2 (Butcher-Schema)

Zeigen Sie, dass das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}
\end{array}$$

mindestens Konsistenzordnung 3 besitzt.

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Eulerverfahren und Verfahren von Heun)

Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren und das Verfahren von Heun zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Verfahren sollten jeweils als Eingabeparameter den Funktionsnamen der rechten Seite der Differenzialgleichung $f(t, y(t))$, den Anfangswert y_0, die Intervallgrenzen $a = t_0$ und $b = t_N$ sowie die Schrittweite h haben und die Näherungswerte $u_0, \dots u_N$ zurückgeben. Testen Sie Ihre Programme an den Beispielen aus Aufgabe G2 und H1 des 6. Übungsblattes.