Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
18. Mai 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Störung der Matrix)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \Delta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ und das gestörte Gleichungssystem $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$.

(a) Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler in Abhängigkeit von α bezüglich der Spalten- und der Zeilensummennorm an.

(b) Für welche α garantieren die Schranken einen relativen Fehler von höchstens $\frac{1}{2}$?

(c) Berechen Sie den exakten relativen Fehler für die maximalen Werte von α aus Teil (a)

Aufgabe G2 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führen Sie 4 Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden ?

d) Bestimmen Sie ein maximales Intervall um $x_N = 0$, so daß jeder Startpunkt $x^{(0)}$ aus diesem Intervall gegen $x_N = 0$ konvergiert.

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle zu finden?

Aufgabe G3 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x) \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 - x_2 - \frac{1}{10} \cdot (1 + x_1^4)^{\frac{1}{4}} \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 - e^{-x_1^2} \cdot \cos x_2 \end{pmatrix}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Iterierten $x^{(k+1)}$, $(k = 0, 1, \ldots)$ an, welches bei der Anwendung des Newton-Verfahrens auf das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ entsteht.

b) Berechnen Sie zum Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^T$ die Näherung $x^{(1)}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Störung der rechten Seite)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm, die von der $\|\cdot\|_\infty$-Norm induziert wird.

(b) Die rechte Seite werde nun durch

$$\Delta b = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

gestört. Geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an.

(c) Lösen Sie nun die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A\tilde{x} = b + \Delta b$ und vergleichen Sie mit der Abschätzung aus Teil (b).

Aufgabe H2 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-10, 10]$.

(b) Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren.

(c) Zeigen Sie, dass das (lokale) Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x| > 1$ nicht konvergiert. Was passiert für $|x| = 1$?

(d) Berechnen Sie nun für den Startpunkt $x^{(0)} = 2$ eine Nullstelle von F mit dem globalisierten Newton-Verfahren mit der Schrittweitenregel von Armijo. Veranschaulichen Sie sich das Verfahren mit Schrittweitensuche an einer Skizze, d.h. zeichnen Sie die Iterierten in Ihre Skizze der Funktion ein.

(e) Welchen Wert hat der Index l aus Satz 5.2.2, ii) in diesem Beispiel?

Aufgabe H3 (Programmieraufgabe: Cholesky-Zerlegung)

(a) Implementieren Sie ein Programm, das für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A die Cholesky-Zerlegung durchführt und die untere Dreiecksmatrix L ausgibt. Das Programm soll an geeigneter Stelle überprüfen, ob die Matrix positiv definit ist und gegebenenfalls eine Fehlermeldung ausgeben.

Testen Sie Ihr Programm an den Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Implementieren Sie nun ein Programm, das ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung von A löst.

Testen Sie Ihr Programm am Gleichungssystem $A_1 x = b$ mit $b = (0, -1, 4)^T$. (vgl. Aufgabe G3 auf dem 4. Übungsblatt)