

Mathematik IV f. Elektrotechnik

Mathematik III f. Informatik

4. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
11. Mai 2011

ACHTUNG!: Die Übungsgruppe 5 findet ab sofort in S306/051 statt.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotsuche auf (A, b) an. Als Ergebnis erhältst Du Matrizen L und R sowie den Vektor c .
- Löse das gestaffelte System $Rx = c$.
- Bestimme die Permutationsmatrix der Zerlegung $PA = LR$.
- Jede Zeilenvertauschung, also jeder Übergang $(A^{(k)}, b^{(k)}) \mapsto (\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)})$ ist durch Matrixmultiplikation darstellbar. Gib für jede Iteration ($k = 1, \dots, n-1$) die Matrix P_k an, für die gilt: $(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{b}^{(k)}) = P_k(A^{(k)}, b^{(k)})$ und verifiziere $P = P_{n-1} \cdots P_1$.

Aufgabe G2 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne zunächst die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus lösen, indem man das Gauß-Eliminationsverfahren auf die Matrix und die rechte Seite anwendet und dann das gestaffelte System $Rx = c$ löst. Löse das System nun mit Hilfe des Gaußalgorithmus

- ohne Pivotsuche,
- mit Spaltenpivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.

Aufgabe G3 (Cholesky Verfahren)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Gauß-Algorithmus und Rundungsfehler)

Berechne die exakte Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Löse dieses Gleichungssystem dann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

- (a) ohne Pivotsuche,
- (b) mit Spaltenpivotsuche,
- (c) mit vollständiger Pivotsuche.

Rechne dabei mit 2 signifikanten Dezimalstellen (d.h. nach jedem Schritt auf 2 Stellen runden).

Beurteile die Qualität der Lösungen.

Aufgabe H2 (Pivotsuche)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -100 & 10 & 1 & 1000 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

Bei welchen dieser Matrizen kann auf die Pivotsuche verzichtet werden?