Mathematik IV f. Elektrotechnik
Mathematik III f. Informatik
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Lucia Panizzi
Dipl.-Math. Sebastian Pfaff

SoSe 2011
27. April 2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kubische Splines)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,1] \to [1,2] : x \mapsto 2^{\cos(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Interpoliere die Funktion f durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ und natürliche Randbedingungen.

Aufgabe G2 (Fehlerabschätzung der Spline-Interpolation)

Schätze für Aufgabe G2 des 1. Übungsblattes, also für $f : [0,2] \mapsto [-1,1]$, $f(x) := \sin(\pi x)$ und die Zerlegung $\Delta = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ den Fehler

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)|$$

der kubische Spline-Interpolation mit Hermite-Randbedingungen ab. Vergleiche diese Abschätzung mit der Fehlerabschätzung, die man in diesem Fall für lineare Splines erhält.

Aufgabe G3 (Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur)

Wir betrachten das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\, dx$$

mit dem Wert ln(2).

(a) (Simpson-Regel)
Berechne eine Näherung für ln(2) durch eine näherungsweise Berechnung des gegebenen Integrals mit Hilfe der Simpson-Regel (d.h. mit der geschlossenen Newton-Cotes-Formel für $n = 2$) und schätze den Fehler ab.

(b) (3/8-Regel)
Läßt sich die Näherung für ln(2) verbessern, wenn anstatt der Simpson-Regel die 3/8-Regel (d.h. die geschlossene Newton-Cotes-Formel für $n = 3$) verwendet wird? Vergleiche sowohl die Fehlerabschätzungen als auch die Näherungswerte mit dem 'exakten' Wert von $\ln 2 = 0.69314718055994530942\ldots$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kubische Splines)

Interpoliere die Funktion

$$f : [0,2] \to [-1,1] : x \mapsto \sin(\pi x)$$

durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung

$$\Delta = \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2\}$$

und natürliche Randbedingungen.

Aufgabe H2 (Quadratische Splines)

Ein quadratischer Spline $s \in S_{\Delta,2}$ ist nach Definition einmal stetig differenzierbar und aus quadratischen Polynomen zusammengesetzt. Dann ist $s'(x)$ offensichtlich stetig und stückweise linear. Es bietet sich also an, s_i durch Integration von s_i' zu bestimmen. Seien $Q_i = s'(x_i)$, für $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt nach der Vorlesung

$$s_i'(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} Q_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} Q_{i+1}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Durch einfache Intergration ergibt sich folgender Ansatz:

$$s_i(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x - x_i)^2}{(x_{i+1} - x_i)} Q_{i+1} - \frac{(x_{i+1} - x)^2}{(x_{i+1} - x_i)} Q_i\right] + c_i.$$

Wir wollen nun analog zum kubischen Fall (siehe Vorlesung) Bestimmungsgleichungen für die Q_i herleiten:

(a) Bestimme mit Hilfe der Bedingung $s_i(x_i) = y_i$ die Integrationskonstante c_i dieses Ansatzes.

(b) Nutze nun die Bedingung $s_{i+1}(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$, um mit Hilfe von (a) n Bestimmungsgleichungen für die Q_i aufzustellen.

(c) Nimmt man nun zu den Gleichungen aus Teil (b) die Bedingung $s'(x_0) = f'(x_0)$ hinzu, so erhält man zur Bestimmung der $Q_0, \ldots, Q_n$ ein Gleichungsystem

$$Hq = b,$$

mit $q = (Q_0, \ldots, Q_n)^T$. Gib die Matrix H und die rechte Seite b dieses Systems an. Sind die Q_i durch dieses System eindeutig festgelegt?

(d) Stelle nun das System zur Bestimmung der $Q_0, \ldots, Q_n$ für die Zusatzbedingung $s'(x_0) = s'(x_n)$ statt $s'(x_0) = f'(x_0)$ auf. Untersuche auch hier, ob die Q_i immer eindeutig festgelegt sind.

(e) Berechne für die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$ auf dem Intervall $[-1,1]$ den quadratischen Spline-Interpolanten mit der Zusatzbedingung aus Teil (c). Verwende die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$. Skizziere die Funktion f und ihren Spline-Interpolanten.