Kapitel 10

Tests bei Normalverteilungsannahmen

10.1 Grundlagen

Beim Testen geht es um die Frage, ob eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$, die als Realisierung von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ angesehen wird, zu einer bestimmten Annahme über die Verteilung der X_i passt oder ihr widerspricht. Die zu prüfende Annahme heißt *Nullhypothese* H_0 und das Verfahren, mit dem entschieden wird, ob ein Widerspruch vorliegt, d.h. ob die Nullhypothese H_0 verworfen werden soll, heißt *Test*.

Seien also $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, so dass eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ als Realisierung von $X_1, \ldots, X_n$ aufgefasst werden kann. Dann ist ein Test durch die Angabe seines *kritischen Bereichs* $K \subset \mathbb{R}^n$ vollständig beschrieben: Es werde eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ beobachtet.

Test:

Falls $(x_1, \ldots, x_n) \in K$: Lehne H_0 ab.
Sonst: Lehne H_0 nicht ab.

Es gibt zwei wichtige Fehlermöglichkeiten:

Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl H_0 zutrifft.

Fehler 2. Art: H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl H_0 nicht zutrifft.

Natürlich soll K so gewählt werden, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art klein ist.

Hierzu wird ein *Testniveau* α vorgegeben und gefordert, dass gilt:

Unter der Nullhypothese gilt $P((X_1, \ldots, X_n) \in K) \leq \alpha$.

Im folgenden wird der kritische Bereich mit Hilfe einer zur Nullhypothese passenden Funktion

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

der sogenannten *Testgröße*, und geeignete kritische Schranken c bzw. c_1 und c_2 beschrieben. Wir betrachten folgende vier Möglichkeiten:

Falls sowohl große als auch kleine Werte von T gegen H_0 sprechen:

- $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, |T(x_1, \ldots, x_n)| > c\}$,
- $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, T(x_1, \ldots, x_n) < c_1 \text{ oder } T(x_1, \ldots, x_n) > c_2\}$.

Falls nur große bzw. kleine Werte von T gegen H_0 sprechen:

- $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, T(x_1, \ldots, x_n) > c\}$,
- $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, T(x_1, \ldots, x_n) < c\}$.

Tests lassen sich nach dem folgenden allgemeinen Prinzip konstruieren.

Konstruktionsprinzip für Test zum Niveau α:

1. Verteilungsannahme formulieren.
2. Nullhypothese H_0 formulieren.
3. Testgröße T wählen und ihre Verteilung unter H_0 bestimmen.
4. $I \subset \mathbb{R}$ so wählen, dass unter H_0 gilt $P(T(X_1, \ldots, X_n) \in I) \le \alpha$.

I wird durch die kritischen Schranken festgelegt und ist von der Form

$$I = \mathbb{R} \setminus [-c, c], \quad I = \mathbb{R} \setminus [c_1, c_2], \quad I =]c, \infty[, \text{ oder } \; I =]-\infty, c[.$$

Als Werte für das Niveau α werden oft 0.1, 0.05 und 0.01 gewählt.

10.2 Wichtige Test bei Normalverteilungsannahme

Wir nehmen nun an, dass $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind. Die wichtigsten Tests verwenden Nullhypothesen über Erwartungswert und Varianz.

Wir geben die Konstruktion verschiedener Tests nach obigem Prinzip an.

Gauß-Test

1. $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma_0^2)$-verteilt, σ_0^2 bekannt.
2. a) $H_0: \quad \mu = \mu_0,$ b) $H_0: \quad \mu \leq \mu_0,$ c) $H_0: \quad \mu \geq \mu_0$
3. Die Testgröße
$$T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{X}_{(n)} - \mu_0)$$
ist nach Satz 8.8.1 $N(0,1)$-verteilt, falls $\mu = \mu_0$ gilt.
4. Ablehnung, falls
a) $|T| > u_{1-\alpha/2},$ b) $T > u_{1-\alpha},$ c) $T < u_\alpha.$

t-Test

1. $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, σ^2 unbekannt.
2. a) $H_0: \quad \mu = \mu_0,$ b) $H_0: \quad \mu \leq \mu_0,$ c) $H_0: \quad \mu \geq \mu_0$
3. Die Testgröße
$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S_{(n)}^2}}$$
ist nach Satz 8.8.1 t_{n-1}-verteilt, falls $\mu = \mu_0$ gilt.
4. Ablehnung, falls
a) $|T| > t_{n-1;1-\alpha/2},$ b) $T > t_{n-1;1-\alpha},$ c) $T < t_{n-1;\alpha}.$

χ^2-Streuungstest

1. $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, μ unbekannt.
2. a) $H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2,$ b) $H_0: \quad \sigma^2 \leq \sigma_0^2,$ c) $H_0: \quad \sigma^2 \geq \sigma_0^2$
3. Die Testgröße
$$T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot S_{(n)}^2$$
ist nach Satz 8.8.1 χ_{n-1}^2-verteilt, falls $\sigma^2 = \sigma_0^2$ gilt.
4. Ablehnung, falls
a) $T < \chi^2_{n-1;\alpha/2}$ oder $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha/2},$ b) $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha},$ c) $T < \chi^2_{n-1;\alpha}.$