Probeklausur
„Lineare Algebra II“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross

SS 2011
6./7. Juli 2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60	
erreichte Punktzahl								

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In dieser Klausur sind alle schriftlichen Unterlagen als Hilfsmittel zugelassen.
Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden komplexen quadratischen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 7 \\ i & 1 & 9 & i \\ 0 & 0 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform.

Lösung:

(a) Da die Matrix untere Dreiecksgestalt hat, kann man unmittelbar ablesen, dass 1 und 2 die beiden einzigen Eigenwerte sind, die beide mit algebraischer Vielfachheit 2 vorkommen. Da $\operatorname{rank}(A-E) = 3$ und $\operatorname{rank}(A-2E) = 2$, folgt, dass die Jordansche Normalform von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist (bis auf die Reihenfolge der Jordankästchen).

(b) Das charakteristische Polynom $P_B(t) = (11-t)(4-t)+6$ von B hat die Nullstellen 5 und 10. Damit ist die Matrix B diagonalisierbar und eine Jordansche Normalform ist $\operatorname{diag}(5, 10)$.

(c) Durch Entwickeln nach der zweiten Spalte erhält man sofort das Minimalpolynom $P_C(t) = (1-t)^2(3-t)(4-t)$. Aus $\operatorname{rank}(C-E) = 3$, was man an der Gestalt der Matrix sofort abliest, folgt, dass es nur ein Jordankästchen zum Eigenwert 1 gibt und eine Jordansche Normalform von C hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(d) Die Matrix D liegt bereits in Jordanscher Normalform vor.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{O}(3)$, so dass $Q^T A Q$ Diagonalgestalt hat.

Lösung: Das charakteristische Polynom ergibt sich zu $t^3 - 2t^2 - 8t$, die Nullstellen sind $0, -2, 4$. Um eine Matrix Q mit den in der Aufgabe verlangten Eigenschaften zu bestimmen, berechnet man zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor und normiert diesen jeweils auf Einheitslänge. Dies ergibt die Spalten von Q. Zum Eigenwert 0 erhält man

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert -2 erhält man

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 4 erhält man

$$\ker \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Matrix Q kann man z.B.

$$Q := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

wählen.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Quadrik im $\mathbb{R}^2$ um eine Ellipse handelt.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Quadrik.

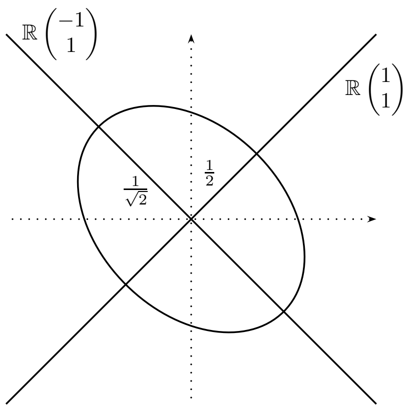
Lösung: Man bestimmt zunächst die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $P_A(t) = (3-t)^2 - 1$, die Eigenwerte sind 2 und 4. Dies zeigt, dass es sich um eine Ellipse handelt. Wir berechnen die Eigenräume von A.

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies sind die Hauptachsen.



4. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Lösung: Wir wenden das Gram-Schmidtsche Ortogonalisierungsverfahren an. Der erste Vektor muss lediglich auf Einheitslänge normiert werden:

$$v_1 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Vektor erhält man:

$$\tilde{v}_2 := u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den dritten Vektor erhält man:

$$\tilde{v}_3 := u_3 - \langle v_1, u_3 \rangle v_1 - \langle v_2, u_3 \rangle v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 9/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$v_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 9^2 + 9^2}}\, \tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{41}}\, \tilde{v}_3.$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $x \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor der Länge eins. Wir betrachten die Matrix

$$A = xx^* \in M_n(\mathbb{C}),$$

d.h. das Matrizenprodukt der beiden Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^* = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\,.$$

(a) Berechnen Sie Ax.

(b) Zeigen Sie, dass $Av = 0$ für alle $v \in \{x\}^\perp$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A.

(d) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

(e) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax.$$

Lösung:
(a) Da x ein Einheitsvektor ist, gilt $1 = \langle x, x\rangle = x^*x$. Also gilt $Ax = xx^*x = x$. (b) Sei $v \in \{x\}^\perp$. Dann folgt $Av = xx^*v = x \cdot \overline{\langle x, v\rangle} = 0$. (c), (d), (e) Wir haben soeben gezeigt, dass A einen eindimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1 und einen $(n-1)$-dimensionalen Kern hat. Dies zeigt, dass der Rang von A gleich eins ist und dass A diagonalisierbar ist, wobei die Eigenwerte nur 0 und 1 sind.

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Geben Sie eine komplexe 7×7-Matrix A mit folgenden Eigenschaften an:

A hat nur die beiden Eigenwerte 0 und 3, die Eigenräume zu beiden Eigenwerten sind eindimensional und es gilt $\operatorname{rank}(A^6) = 2$.

Weisen Sie nach, dass die Matrix A durch diese Eigenschaften bis auf Konjugation mit einer Matrix $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eindeutig festgelegt ist. **5P.**

(b) Sei B eine komplexe 4×4-Matrix, welche die Eigenwerte 7 und 9, aber keine weiteren, besitzt. Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen an, die eine solche Matrix haben kann. **5P.**

Lösung:

(a) Dass die Eigenräume zu beiden Eigenwerten jeweils eindimensional sind, bedeutet, dass eine Jordansche Normalform von A genau zwei Jordankästchen besitzt, zu jedem der beiden Eigenwerte eines. Es kommt also nur noch darauf an, die Größe der beiden Jordankästchen zu bestimmen. Angenommen, des Jordankästchen zum Eigenwert 0 hat die Größe k und das zum Eigenwert 3 die Größe $7-k$, wobei $1 \le k \le 6$. Das Jordankästchen zum Eigenwert 0 ist nilpotent und seine sechste Potenz ist gleich Null. Der Rang von A^6 gibt also die Größe des Jordankästchens zum Eigenwert 3 an. Wir haben gezeigt, dass die Jordansche Normalform von A folgende Gestalt haben muss (bis auf die Reihenfolge der Jordankästchen):

$$A := \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Umgekehrt hat die obige Matrix die geforderten Eigenschaften. Es folgt, dass jede Matrix mit den in der Aufgabe beschriebenen Eigenschaften zu A konjugiert ist.

(b) Bis auf die Reihenfolge der Jordankästchen erhält man:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$