Probeklausur „Lineare Algebra II“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Kollross

SS 2011
6./7. Juli 2011

Name: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Semester: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	10	10	10	60	
erreichte Punktzahl								

Bitte beachten Sie: Geben Sie nicht nur Endergebnisse an, sondern auch den Lösungsweg. Die maximal mögliche Punktzahl wird nur auf vollständig richtig begründete Lösungen mit klar ersichtlichem Lösungsweg vergeben.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tipp: Verschaffen Sie sich einen Gesamtüberblick über die Aufgaben, bevor Sie beginnen.

Füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts am Anfang der Klausur in Blockschrift (Großbuchstaben) aus.
Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

In dieser Klausur sind alle schriftlichen Unterlagen als Hilfsmittel zugelassen.
Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Viel Erfolg!

Die Aufgaben beginnen auf der Rückseite

1. Aufgabe (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden komplexen quadratischen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 7 \\ i & 1 & 9 & i \\ 0 & 0 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{O}(3)$, so dass $Q^T AQ$ Diagonalgestalt hat.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Quadrik im $\mathbb{R}^2$ um eine Ellipse handelt.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Quadrik.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $x \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor der Länge eins. Wir betrachten die Matrix

$$A = xx^* \in M_n(\mathbb{C}),$$

d.h. das Matrizenprodukt der beiden Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x^* = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) .$$

(a) Berechnen Sie Ax.

(b) Zeigen Sie, dass $Av = 0$ für alle $v \in \{x\}^\perp$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A.

(d) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

(e) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax.$$

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Geben Sie eine komplexe 7×7-Matrix A mit folgenden Eigenschaften an:

A hat nur die beiden Eigenwerte 0 und 3, die Eigenräume zu beiden Eigenwerten sind eindimensional und es gilt $\operatorname{rank}(A^6) = 2$.

Weisen Sie nach, dass die Matrix A durch diese Eigenschaften bis auf Konjugation mit einer Matrix $X \in GL(n, \mathbb{C})$ eindeutig festgelegt ist. **5P.**

(b) Sei B eine komplexe 4×4-Matrix, welche die Eigenwerte 7 und 9, aber keine weiteren, besitzt. Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen an, die eine solche Matrix haben kann. **5P.**