Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

02. August 2010

Klausur
„Lineare Algebra II“

Name: .... | Vorname: ....

Matrikelnummer: .... | Fachrichtung: ....

Fachsemester: ....

Beachten Sie: Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes direkt und in deutlich lesbaren Druckbuchstaben aus. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und nummerieren Sie diese fortlaufend.
Als Hilfsmittel dürfen sämtliche Bücher, Skripten und eigene Aufzeichnungen benutzt werden. Mobiltelefone und andere elektronische Geräte sollten jederzeit ausgeschaltet in Ihrer Tasche verstaut sein.
Bitte geben Sie zu jeder Lösung eine Begründung an, denn der Großteil der Punkte wird für den Lösungsweg vergeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punktzahl	12	11	7	9	11	10	60	
erreichte Punktzahl								

1. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, welche sind ähnlich zueinander?

2. Aufgabe (11 Punkte)

a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass die durch $\langle x, y \rangle := x^T Ay$ definierte bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt ist.

b) Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der von

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich des obigen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2+i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, warum eine unitäre Matrix Q existiert, so dass Q^*AQ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie eine solche Matrix Q und geben Sie Q^*AQ an.

4. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben sei die Quadrik

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und den Typ der Quadrik. Skizzieren Sie diese auch!

5. Aufgabe (11 Punkte)

a) Geben Sie Repräsentanten für alle Ähnlichkeitsklassen von komplexen 5×5-Matrizen N an, für die $N^5 = 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform und die zugehörige Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Aufgabe (10 Punkte)

a) Sei A eine komplexe 30×30-Matrix, die nur die beiden Eigenwerte 1 und i besitzt. Die Folge der Zahlen

$$\dim(\text{kern}\,(A - E)^k), \quad k = 1, 2, \cdots$$

ist $3, 5, 7, 9, 10, 11, \cdots$ und die Folge der Zahlen

$$\dim\,(\text{kern}\,(A - iE)^m)\,, \quad m = 1, 2, \cdots$$

ist $5, 9, 13, 17, 19, \cdots$. Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen. Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die reelle symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist negativ definit.

c) Zwei komplexe 2×2-Matrizen, die das gleiche charakteristische Polynom besitzen, sind zueinander ähnlich.

d) Das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

lautet $M_A(t) = t - 2$.

e) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ist normal.