Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Kollross
K. Schwieger, T. Felber

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

02. August 2010

# Klausur
# „Lineare Algebra I“

Name: ................................ | Vorname: ................................

Matrikelnummer: ........................ | Fachrichtung: ............................

Fachsemester: ..........................

**Beachten Sie:** Bitte füllen Sie den Kopf dieses Blattes direkt und in deutlich lesbaren Druckbuchstaben aus. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und nummerieren Sie diese fortlaufend.
Als Hilfsmittel dürfen sämtliche Bücher, Skripten und eigene Aufzeichnungen benutzt werden. Mobiltelefone und andere elektronische Geräte sollten jederzeit ausgeschaltet in Ihrer Tasche verstaut sein.
Bitte geben Sie zu jeder Lösung eine Begründung an, denn der Großteil der Punkte wird für den Lösungsweg vergeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punktzahl | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 60 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |

**1. Aufgabe** (10 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 \\ -2x_1 - x_3 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrix von $\varphi$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ an und bestimmen Sie eine Basis des Bildes von $\varphi$. Welchen Rang hat $\varphi$? Ist $\varphi$ invertierbar? Welche Dimension hat der Kern von $\varphi$?

**2. Aufgabe** (10 Punkte)

Welche der folgenden reellen $3 \times 3$–Matrizen sind invertierbar?.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten. Berechnen Sie gegebenfalls die inverse Matrix.

**3. Aufgabe** (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die Vektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 11x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ -5x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ -3x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[\varphi]_B$ dieses Endomorphismus bezüglich der Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$.

**4. Aufgabe** (10 Punkte)

Seien $u_1, \ldots, u_m$ Elemente eines Vektorraums. Zeigen Sie: Die Vektoren

$$v_k := \sum_{j=1}^{k} u_j, \quad k = 1, \ldots, m,$$

sind genau dann linear abhängig, wenn $u_1, \ldots, u_m$ linear abhängig sind.

**5. Aufgabe** (10 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}^4$ der Untervektorraum bestehend aus allen Vektoren $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{C}^4$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & -ix_3 & -ix_4 & = 0, \\ ix_1 & & +x_3 & & = 0, \\ & x_2 & & -ix_4 & = 0. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U$.

(b) Sei $W$ der von $(1,0,0,0)^T$ und $(0,1,0,0)^T$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^4 = U \oplus W$ gilt.

**6. Aufgabe** (10 Punkte)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^7$ mit $\dim(\ker(\varphi)) = 4$ und $\operatorname{rank}(\varphi) = 3$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine invertierbare komplexe $3 \times 3$–Matrix $A$ mit $\operatorname{tr}(A) = 0$.

(c) Sei $V = M_2(\mathbb{C})$ der Vektorraum der komplexen $2 \times 2$–Matrizen. Welche der folgenden Abbildungen $V \to \mathbb{C}$ sind linear?

$$(i) \quad A \mapsto \det(A), \qquad (ii) \quad A \mapsto \operatorname{tr}(A), \qquad (iii) \quad A \mapsto \operatorname{rank}(A).$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

(d) Sei $G = (\mathbb{R}^n, +)$ die Gruppe bestehend aus allen Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit der Vektoraddition als Verknüpfung. Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen Untergruppen von $G$ sind:

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 1\}, \\ B &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n > 0\}, \\ C &= \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Antworten.