Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
07. Februar 2011

14. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kurvenintegrale/Cauchysche Integralformel)

(a) Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale mit Hilfe der Definition 17.1 bzw. der Sätze 18.1 und 18.2.

i. $\int_{|z|=1} \overline{z} dz$

ii. $\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz$

iii. $\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$

iv. $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-2z-3} dz$

(b) Berechnen Sie das unter i. gegebene Integral mit Hilfe des Satzes 17.1.

Lösung:

(a) i. Mit Bemerkung (6) S. 163 und Def. 17.1 berechnet man

$$\int_{|z|=1} \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot ite^{it} dt = 2\pi i \,.$$

ii. Mit Bemerkung (6) S. 163 und Satz 18.1 berechnet man

$$\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{|z-2i|=2} \frac{\frac{1}{(z+2i)}}{(z-2i)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i+2i} = \frac{\pi}{2} \,.$$

iii. Analog berechnet man mit Satz 18.2

$$\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = \int_{|z-2i|=2} \frac{\frac{1}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2} = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \frac{-2}{(2i+2i)^3} = \frac{\pi}{16} \,.$$

Und wiederum Satz 18.1 liefert

iv.

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-2z-3} dz = \int_{|z|=2} \frac{\frac{1}{(z-3)}}{(z+1)} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{-1-3} = -i\frac{\pi}{2} \,.$$

(b) Es ist

$$f(z) = \bar{z} = \underbrace{x}_{u} + i\underbrace{(-y)}_{v} \, .$$

Der Weg lässt sich schreiben als

$$W : z(t) = \underbrace{\cos t}_{x} + i\underbrace{\sin t}_{y} ; \quad t \in [0, 2\pi] \, .$$

Also ist $u(x,y) = \cos t$; $v(x,y) = -\sin t$; $\dot{x} = -\sin t$ und $\dot{y} = \cos t$.
Wir berechnen

$$\int_{|z|=1} \overline{z} dz = \int_W f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) - (-\sin t)\cos t]\, dt + i\int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t]\, dt$$

$$\int_{|z|=1} \overline{z} dz = i\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi i \, .$$

Aufgabe G2 (Komplexe Wegintegrale/Berechnung durch eine Stammfunktion)

a) Es sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, welcher von 1 nach πi führt. Berechnen Sie $\int_\gamma ze^z dz$.

b) Es sei $K = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$ ein Weg in der komplexen Ebene. Dabei seien K_1 bzw. K_3 Geradenstücke von $z_1 = 2\pi$ nach $z_2 = \frac{3\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2}$ bzw. $z_3 = \frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{2}$ nach $z_4 = i\,\frac{\pi}{2}$, und K_2 sei ein Halbkreis um $z_5 = \pi + i\,\frac{\pi}{2}$ vom Radius $\frac{\pi}{2}$.
Skizzieren Sie K und bestimmen Sie $\int_K e^{\sin 2z} \cos 2z\, dz$.

Lösung:

a) Da $F(z) = ze^z - e^z$ eine Stammfuntion zu ze^z ist, folgt mit Bemerkung (17), S. 166 und Satz 17.2

$$\int_\gamma ze^z dz = F(z(i\pi) - F(z(1)) = \pi i e^{\pi i} - e^{\pi i} - 1e^1 + e^1 = (\pi i - 1)(-1) = 1 - \pi i \, .$$

b) Es gilt

$$\left(\frac{1}{2} e^{\sin 2z}\right)' = \cos 2z\, e^{\sin 2z}.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\int_K e^{\sin 2z} \cos 2z\, dz &= \frac{1}{2}\ e^{\sin 2z}\Big|_{z_1}^{z_4} = \frac{1}{2}\left(e^{\sin \pi i} - e^{\sin 4\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\sin(\pi i)} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i \sinh \pi} - 1\right);\end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Komplexe Wegintegrale)

Wählen Sie die jeweils geeignete Methode um folgende Aufgaben zu lösen.

a) Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}^2 + 1$ entlang des Viertelkreises um 0, der die Punkte R und iR verbindet.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz,$$

wobei C der positiv orientierte Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten 0, $2+i$, $2-i$ ist.

Lösung:

a) Mit Hilfe von Def. 17.1 lässt sich das Wegintegral einfach berechnen.

Parametrisierung der Kurve:

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = Re^{it};$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma f\, dz &= \int_0^{\pi/2} \left(\overline{\gamma(t)}^2 + 1\right) \gamma'(t) dt = \int_0^{\pi/2} (R^2 e^{-2it} + 1)\, Ri\, e^{it}\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (R^3 i e^{-it} + Ri\, e^{it}) dt = R^3 - R + i(R^3 + R); \end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformeln berechnen wir folgende Lösung. Die Funktion $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}$ ist holomorph auf dem Dreieck außer $z = 1$. Nach Satz 18.2 gilt

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = f^{(n)}(z_0).$$

Es ist

$$\int_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz = \int_c \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}\, dz\,.$$

Mit

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\,; \quad z_0 = 1\,; \quad n = 1 \quad \text{und} \quad f'(z) = \frac{\pi \cos \pi z (z+1)^2 - 2(z+1) \sin \pi z}{(z+1)^4}$$

folgt die Berechnung des Integrals

$$\int_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2 i}{2}\,.$$

Aufgabe G4 (Komplexe Wegintegrale/Partialbruchzerlegung)

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \frac{\cosh z\, dz}{(z+1)^2(z-1)}\,,$$

wobei C eine positiv orientierte, doppelpunktfreie, geschlossene, stückweise glatte Kurve ist, die die Punkte $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ einmal umläuft.

Lösung: Wir zerlegen das Integral mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+1)^2(z-1)} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{(z+1)^2} \\
&= \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+B+C}{(z+1)^2} = \frac{A(z+1)^2 + (Bz+B+C)(z-1)}{(z+1)^2(z-1)} \\
&= \frac{Az^2 + 2Az + A + Bz^2 + Bz + Cz - Bz - B - C}{(z+1)^2(z-1)} \\
&= \frac{z^2(A+B) + z(2A+C) + A - B - C}{(z+1)^2(z-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A + B = 0 &\;\Rightarrow\; A = -B \\
2A + C = 0 &\;\Rightarrow\; C = -2A = 2B \\
A - B - C &\;=\; -B - B - 2B = 1 \\
-4B = 1 &\;\Rightarrow\; B = -\frac{1}{4}, \\
A = \frac{1}{4}; &\qquad C = -\frac{1}{2};
\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{(z+1)^2(z-1)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+1^2}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_c \frac{\cosh z\, dz}{(z+1)^2(z-1)} &= \frac{1}{4}\int_c \frac{\cosh z\, dz}{z-1} - \frac{1}{4}\int_c \frac{\cosh z\, dz}{z+1} - \frac{1}{2},\int_c \frac{\cosh z\, dz}{(z+1)^2} \\
&= \frac{\pi i}{2}\cosh z\Big|_{z=1} - \frac{\pi i}{2}\cosh z\Big|_{z=-1} - \frac{\pi i}{1!}(\cosh z)'\Big|_{z=-1} \\
&= \pi i \sinh 1\,.
\end{aligned}$$