Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
31. Januar 2011

# 13. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Komplexe Funktionen)
Was ist die Bildmenge des Bereichs

$$A = \{z \in C : (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) > 1), \text{ und } \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$$

unter der Abbildung $z = z^2$ ?

**Lösung:** Wir bestimmen die Bildmenge von der Kurve $xy = 1$.

$$w = z^2 = u + iv, \quad \text{also} \quad u = x^2 - y^2,\, v = 2xy.$$

Daraus schließen wir, dass das Bild von der Kurve $xy = 1$ die Kurve $v = 2$ ist. Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt in $A$, z.B. $z = 2 + i2$, dann ist $f(2 + 2i) = (2 + 2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i$, d.h. die Bildmenge vom $A$ ist $\{z \in C : \operatorname{Im}(z) > 2\}$.

**Aufgabe G2** (Komplexe Funktionen)
Sei $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C}/\{0\}$.

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil dieser Funktion.

b) Bestimmen Sie die Bildmenge des Kreises $|z| = 1$.

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion.

**Lösung:**

a) Mit
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$
erhalten wir
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) + iy\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)\right).$$
Mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ sowie $x^2 + y^2 = r^2$ ergeben sich die Real- und Imaginärteile der Bildmenge
$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

b) Der in irgendeiner Richtung durchlaufene Kreis $|z| = r_0 < 1$ geht in die Kurve

$$u = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos, \quad v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)\sin\varphi,$$

also in eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)$ über. Für $r_0 \to 1$ geht diese Ellipse in die Strecke $[-1, 1]$ der $u$-Achse über, für $r_0 \to 0$ wird sie unendlich gross.

c)

$$0 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \to z^2 = -1 \text{ oder } z = \sqrt{-1} \to z = \pm i.$$

**Aufgabe G3** (Differentiation komplexer Funktionen)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}, \\ f_2(z) &= \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ f_3(z) &= \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

holomorph sind. Wenn ja, berechnen Sie die Ableitungen.

**Lösung:** $f_1$ ist regulär auf der Menge

$$\begin{aligned} M &= \{z \in \mathbb{C} : z^3 + 1 \neq 0\} = \mathbb{C}/\{e^{\pi i/3}; e^{\pi i}; e^{5\pi i/3}\}. \\ f_1'(z) &= \frac{(z^3 + 1)(3z^2 + 2) - (z^3 + 2z + 1)(3z^2)}{(z^3 + 1)^2} = \frac{(2 - 4z^3)}{(z^3 + 1)^2} \end{aligned}$$

$f_2$ ist nicht regulär. Die Funktion $f_2(z)$ hat den Realteil $u(x, y) = x$ und Imaginärteil $v = 0$. Die Ableitungen lauten

$$u_x(x, y) = 1\,, u_y(x, y) = 0\,, v_x(x, y) = 0\,, v_y(x, y) = 0$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt.

Die analoge Rechnung ergibt $f_3$ ist ebenfalls nicht regulär.

**Aufgabe G4** (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

(a) Wir betrachten die Funktion

$$u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad u(x, y) := 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bestimme alle Funktionen $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ derart, dass $u + iv\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Verfahre analog für $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $u(x + iy) := x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{-y}\cos x$.

**Lösung:** (a) Es sei $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Damit $u + iv$ holomorph ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 6x^2 - 6y^2 + 2x \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 12xy + 2y + 1 \tag{2}$$

erfüllt sein, aufgrund derer $v$ übrigens stetig differenzierbar sein muss. Betrachten wir für festes $x$ die stetig differenzierbare Funktion $y \to v(x,y)$, so ist aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (1) genau dann erfüllt, wenn

$$v(x,y) = v(x,0) + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x,t)\,dt = v(x,0) + 6x^2y - 2y^3 + 2xy\,.$$

Es muss also

$$v(x,y) = w(x) + 6x^2y - 2y^3 + 2xy$$

gelten, wobei $w(x) := v(x,0)$ stetig differenzierbar ist. Nun ist Gleichung (2) erfüllt genau dann, wenn

$$w'(x) + 12xy + 2y = 12xy + 2y + 1 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dies ist äquivalent zu $w'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $w(x) = x + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Die möglichen Funktionen $v$ sind also genau diejenigen der Gestalt

$$v(x,y) = x + 6x^2y - 2y^3 + 2xy + C \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

(b) Analog erhält man in der Situation von (b)

$$v(x,y) = 2xy - e^{-y}\cos x - e^{-y}\sin x + C\,.$$

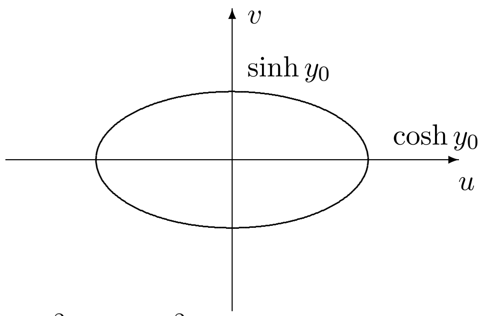
# Hausübung

**Aufgabe H1** (Komplexe Funktionen)
**(3 Punkte)**
Sei die Abbildung $z \mapsto \sin(z)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Linien, die parallel zur realen Achse sind, auf Ellipsen und dass die Linien, die parallel zur imaginären Achse sind, auf Hyperbeln abgebildet werden. Skizzieren Sie diese Ellipsen und Hyperbeln.

*Hinweis:*
$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \sin(iy)\cos x \\ &= \sin x \cdot \cosh y + i \sinh y \cos x, \end{aligned}$$

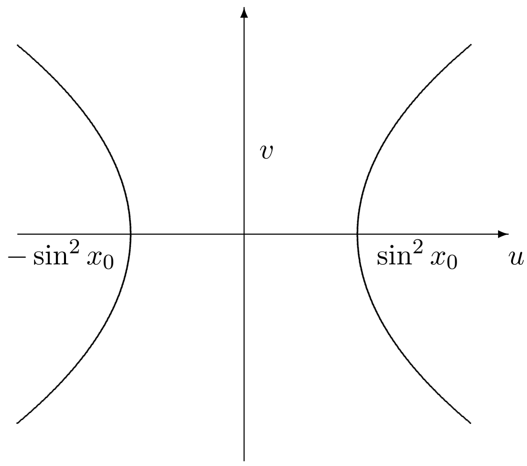
**Lösung:** Nehmen wir an, dass $y = y_0$ konstant ist. Sei $\sin z = u + iv$. Dann erhalten wir mit $u(x, y_0) = \sin x \cosh y_0$ und $v(x, y_0) = \cos x \sinh y_0$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ die Ellipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1.$$




Jetzt setzen wir $x = x_0$. Aus $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ folgt die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1\,.$$



**Aufgabe H2** (Komplexe Differenzierbarkeit)
**(4 Punkte)**

Satz: Sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine komplexe Funktion. Die Funktionen $u$ und $v$ seien in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0)$ partiell differenzierbar, und die partiellen Ableitungen seien im Punkt $(x_0.y_0)$ stetig. Ausserdem seien die Cauchy-Riemannschen Dgln. im Punkt $(x_0, y_0)$ erfüllt. Dann ist $f$ im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar. Bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{C}$, in denen die folgenden Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:

$$\begin{aligned}
f_1 \colon x+iy &\mapsto xy + ixy \\
f_2 \colon x+iy &\mapsto x^4y^3 + ix^3y^4 \\
f_3 \colon x+iy &\mapsto y^2 \sin x + iy \\
f_4 \colon x+iy &\mapsto \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)\,.
\end{aligned}$$

**Lösung:** Schreibe $f_k = u_k + iv_k$ mit $u_k, v_k \colon \mathbb{C} \to R$.

$f_1$: Wir haben $u_1(x,y) = xy$, $v_1(x,y) = xy$. Die partiellen Ableitungen sind stetig und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen verlangen

$$y = \frac{\partial u_1}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial v_1}{\partial y} = x, \quad x = \frac{\partial u_1}{\partial y} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v_1}{\partial x} = -y\,,$$

was lediglich für $(x,y) = (0,0)$ gilt.

$f_2$: Die partiellen Ableitungen sind stetig und die erste der Cauchy-Riemannschen DGLn,

$$4x^3y^3 = \frac{\partial u_2}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial v_2}{\partial y} = 4x^3y^3\,,$$

ist stets erfüllt. Die zweite erfordert

$$\begin{aligned}
3x^4y^2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v_2}{\partial x} = -3x^2y^4 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = x^2y^2(x^2+y^2) \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ oder } \ y = 0\,.
\end{aligned}$$

$f_3$: Die partiellen Ableitungen sind stetig und die Cauchy-Riemannschen DGLn erfordern

$$y^2 \cos x = \frac{\partial u_3}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial v_3}{\partial y} = 1 \quad \text{und} \quad 2y \sin x = \frac{\partial u_3}{\partial y} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial v_3}{\partial x} = 0\,.$$

Die erste Gleichung liefert $y \neq 0$, so dass zweitere $\sin x = 0$ erfordert, also $x \in \pi\mathbb{Z}$. Gehen wir mit $x = n\pi$ in die erste Gleichung ein, so erhalten wir die Bedingung

$$y^2(-1)^n = 1\,,$$

die nur für gerades $n$ zu erfüllen ist, mit $y = \pm 1$. Somit ist $f_3$ in $x+iy$ komplex differenzierbar genau dann, wenn

$$(x,y) \in 2\pi\mathbb{Z} \times \{1,-1\} = \{(0,\pm 1),\ (\pm 2\pi, \pm 1),\ \ldots\}\,.$$

$f_4$: Wir berechnen

$$\frac{\partial u_5}{\partial x} = \frac{\partial u_5}{\partial y} = 2\sin(x+y)\cos(x+y) = -\frac{\partial v_5}{\partial x} = -\frac{\partial v_5}{\partial y}\,.$$

Die partiellen Ableitungen sind stetig und die zweite der Cauchy-Riemannschen DGLn ist in jedem Punkt $(x,y)$ erfüllt, während

$$\frac{\partial u_5}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v_5}{\partial y}(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad x+y \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\,.$$

**Aufgabe H3** (Integration komplexer Funktionen)
**(3 Punkte)**
Wir betrachten die Ellipse mit Mittelpunkt 0 und Halbachsen $a > 0$, $b > 0$. Sei $\gamma(t)$ der Weg, der die obere Hälfte der Ellipse von $a$ nach $-a$ durchläuft.
Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz$.

**Lösung:** Der Weg der die obere Hälfte der Ellipse beschreibt kann beschrieben werden durch

$$\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t, \quad t \in [0, \pi]\,.$$

Mit Definition 17.1: $\int_W f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dt$ und

$$\gamma(t) = z(t) \quad \to \quad f(z(t)) = \operatorname{Re}(z(t)) = \operatorname{Re}(\gamma(t)) = a\cos t \quad \text{und} \quad \dot{z}(t) = \dot{\gamma}(t)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz &= \int_0^\pi a\cos t \cdot (-a\sin t + ib\cos t)dt \\
&= \int_0^\pi -a^2 \sin t\cos t dt + i\,ab \int_0^\pi \cos^2 t\, dt \\
&= -a^2 \int_0^\pi \sin t\, d(\sin t) + i\,ab \int_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\
&= -a^2 \underbrace{\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^\pi}_{=0} + \frac{i\,ab}{2}\left(\pi + \underbrace{\left.\frac{1}{4}\sin 2t\right|_0^\pi}_{=0}\right) = \frac{\pi\, ab\, i}{2}\,;
\end{aligned}$$

(3 Punkte)

**Aufgabe H4** (Cauchysche Integralformeln)
**(3 Punkte)**
Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

$$\int_{C_i} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, dz, \quad i = 1, 2, 3,$$

wenn

a) $C_1 \equiv \{z(t) = 2 + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$
b) $C_2 \equiv \{z(t) = 2 + 3e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$
c) $C_3 \equiv \{z(t) = 2 + 5e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$

**Lösung:**

a) Die Funktion $\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ ist holomorph für $\{z : |z-2| \leq 1\}$. Nach Satz 17.3 (Cauchyscher Integralsatz) ist $\int_{C_1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\, dz = 0$.
b) Im Inneren von $\{z : |z-2| \leq 3\}$ liegt nur eine Nullstelle des Nenners $z = 0$.

Satz 18.1 (Cauchyscher Integralsatz) liefert

$$\int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

Wir schreiben

$$\int_{C_2} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} = \int_{C_2} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z - 0}$$

so dass $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ und berechnen $f(z_0 = 0) = -\frac{1}{6}$ .

Damit ergibt sich

$$\int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} = -2\pi i \frac{1}{6} = -\frac{\pi i}{3} \,.$$

c) Im Inneren von $\{z : |z - 2| \leq 5\}$ liegen zwei Nullstellen des Nenners $z = 0$ und $z = 6$. In diesem Fall betrachten wir zunächst die Partialbruchzerlegung des Ausdrucks $\frac{1}{z^2-6z}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2 - 6z} &= \frac{A}{z-6} + \frac{B}{z} = \frac{Az + B(z-6)}{z(z-6)} = \frac{z(A+B) - 6B}{z(z-6)} \\
&\Rightarrow \quad A + B = 0 \Rightarrow A = -B \\
&\qquad -6B = 1 \Rightarrow B = -\tfrac{1}{6} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad A \;=\; \tfrac{1}{6}\,. \\
\frac{1}{z^2 - 6z} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z}\,.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir das Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{c_3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, dz &= \frac{1}{6} \int_{c_3} \frac{e^{z^2}}{z-6}\, dz - \frac{1}{6} \int_{c_3} \frac{e^{z^2}}{z}\, dz \\
&= 2\pi i \left( \frac{1}{6}\, e^{z^2} \Big|_{z=6} - \frac{1}{6}\, e^{z^2} \,\big|_{z=0} \right) = \frac{\pi i}{3}(e^{36} - 1).
\end{aligned}$$