Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
24. Januar 2011

12. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kurven)

Zeichne die in a) – c) gegebenen Kurven. Sind diese Kurven geschlossen, doppelpunktfrei, glatt oder stückweise glatt? Bei geschlossenen, doppelpunktfreien Kurven gebe man auch an, ob die Kurve positiv oder negativ orientiert ist.

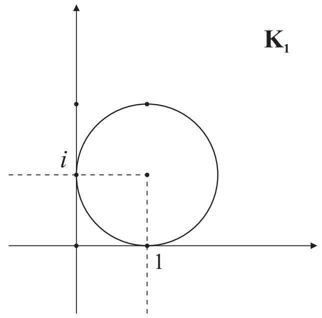
(a) $K_1 = \{z_1(t) = 1 + i + e^{it},\ t \in [0, 3\pi]\}$;

(b) $K_2 = \{z_2(t) = a\cos t + ib\sin t,\ t \in [0, 2\pi],\ \{a, b\} \subset \mathbb{R}^+\}$;

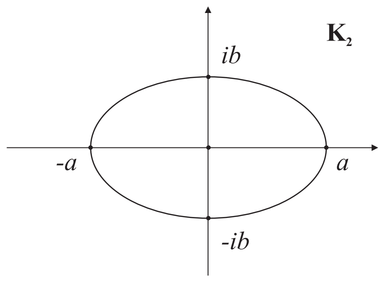
(c) $K_3 = \{z_3(t) = t + i|t|,\ t \in [-1, 1]\}$;

Lösung:

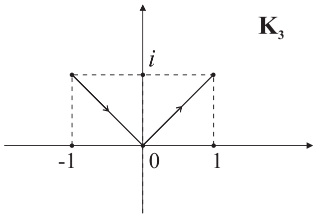
(a) Der Weg $z_1(t)$ beschreibt die von $2+i$ nach i eineinhalbfach im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie des Einheitskreises mit Mittelpunkt $1 + i$. Diese Kurve ist nicht geschlossen, nicht doppelpunktfrei, glatt.



(b) Der Weg $z_2(t)$ beschreibt die von a nach a durchlaufene Ellipse mit Mittelpunkt 0 und den Halbachsen $a > 0$, $b > 0$. Die Kurve ist geschlossen, doppelpunktfrei, glatt und positiv orientiert.



(c) Der Weg $z_3(t)$ besteht aus zwei geraden Verbindungsstrecken. Die erste läuft von $-1+i$ nach 0, die zweite von 0 nach $1+i$. Die Kurve ist nicht geschlossen, doppelpunktfrei, stückweise glatt.



Aufgabe G2 (Mengen)

Skizziere die folgenden Mengen $M_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Welche dieser Mengen sind zusammenhängend, einfach zusammenhängend, welche sind Gebiete?

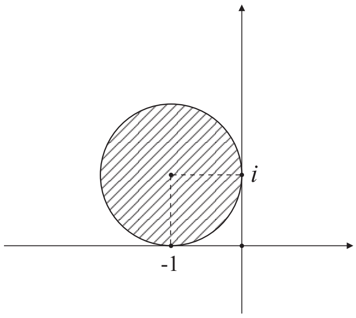
(a) $M_1 = \{z : \ |z + 1 - i| \leq 1\}$;

(b) $M_2 = \{z : \ \mathrm{Re}(z + 2) > 3\}$;

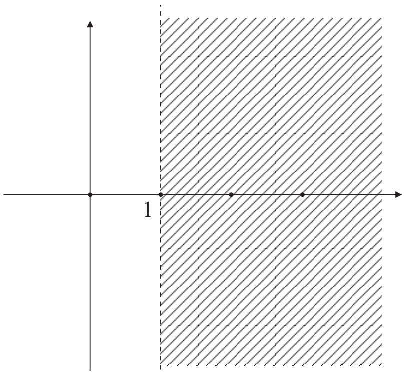
(c) $M_3 = \{z : \ \mathrm{Re}(z - 2) < 3\} \cap \{z : \ |z - 2| \geq 1\}$;

(d) $M_4 = M_1 \cup M_2$;

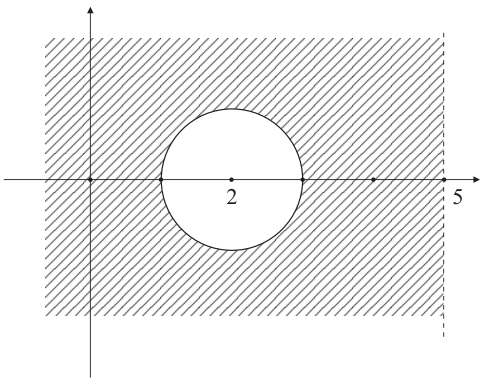
Lösung:

(a) 

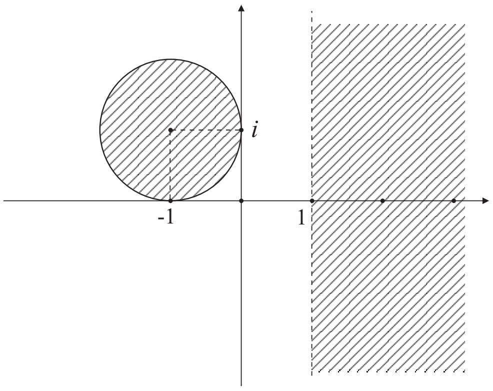
zusammenhängend;
einfach zusammenhängend;
nicht Gebiet, da M_1 nicht offen ist;

(b) 

zusammenhängend;
einfach zusammenhängend;
Gebiet;

(c) 

zusammenhängend;
nicht einfach zusammenhängend;
nicht Gebiet, da M_3 nicht offen ist;

(d) 

nicht zusammenhängend;
einfach zusammenhängend;
nicht Gebiet;

Aufgabe G3 (Folgen)

Überprüfe die Folgen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(a) $z_n = \frac{3n^5+1}{n^5+2n} + i(1+\frac{1}{n})^n$;

(b) $z_n = e^{i\pi n}$;

Lösung:

(a) $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^5}}{1+\frac{2}{n^4}} + i(1+\frac{1}{n})^n = 3 + ie$;

(b) Die Folge $z_n = e^{i\pi n} = \cos \pi n + i \sin \pi n = (-1)^n$ konvergiert nicht, weil $\limsup_{n\to\infty} z_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} z_n = -1$.

Aufgabe G4 (Reihen)

Untersuche die folgenden unendlichen Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3i)n}{(1-i)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{i^n}{2})$.

(c) Bestimme den Konvergenzradius für die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{6-8i}{100})^k (z-i)^k$.

Hinweis: a) Wurzelkriterium,
b) Prüfe die notwendige Konvergenz-Bedingung,
c) Wurzelkriterium.

Lösung:

(a) Wir untersuchen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|5+3i| \cdot n}{|1-i|^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|5+3i| \cdot n}{|1-i|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(34)^{1/2}} \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Nach Wurzelkriterium Band I/19.5 konvergiert diese Reihe.

(b) Wenn diese Reihe konvergiert, dann muss $|z_n| = |\frac{1}{2} + \frac{i^n}{2}|$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren.
Wenn n gerade ist, dann ist $|z_n| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = 0$.
Wenn $n = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots$, dann ist

$$|z_n| = |\frac{1}{2} + (-1)^k \frac{i}{2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daher besitzt z_n eine Teilfolge z_{2k+1}, die nicht gegen 0 konvergiert, d.h. z_n konvergiert nicht gegen 0.

(c) Nach Wurzelkriterium konvergiert diese Potenzreihe für alle $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-i| < 10\}$, weil $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|\frac{6-8i}{100}|^k} = \frac{1}{10}$ und diviergiert für alle $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-i| > 10\}$.

Hausübung

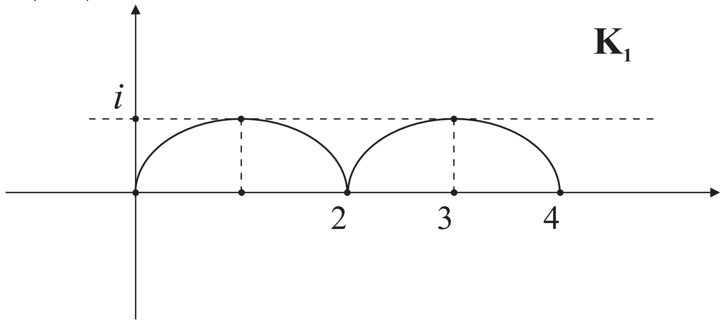
Aufgabe H1 (Kurven)
(1+1 Punkte)
Zeichne die in a), b) gegebenen Kurven. Sind diese Kurven geschlossen, doppelpunktfrei, glatt oder stückweise glatt?

(a) $K_1 = \{z_1(t) = (t\pi - \sin(t\pi)) + i(1 - \cos(t\pi)),\ t \in [0, 4]\}$ (Zykloide);

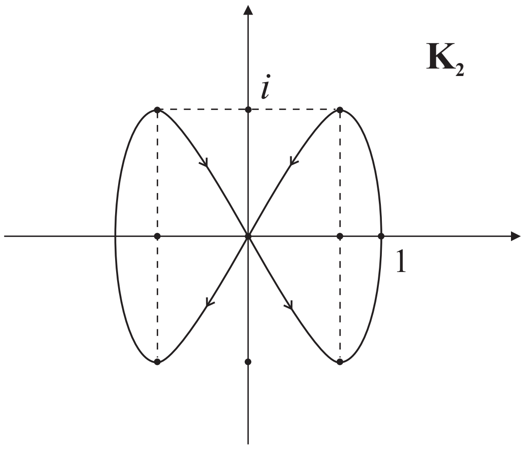
(b) $K_2 = \{z_2(t) = \cos t + i \sin 2t,\ t \in [0, 2\pi]\}$ (Lemniskate).

Lösung:

(a) K_1 ist eine Zykloide, die aus 0 nach 4π läuft. Nicht geschlossen, doppelpunktfrei, stückweise glatt (da $\big(\dot{x}(t)\big)^2 + \big(\dot{y}(t)\big)^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 0,\ t = 2\pi$).



(b) K_2 ist eine Lemniskate, die aus 1 nach 1 läuft. Sie ist geschlossen, nicht doppelpunktfrei ($z_2(\frac{\pi}{2}) = z_2(\frac{3\pi}{2})$), glatt.



Aufgabe H2 (Mengen)
(1+1 Punkte)
Skizziere die folgenden Mengen $M_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$. Welche dieser Mengen sind Gebiete?

(a) $M_1 = \{z : |\frac{z-1}{z+1}| \leq 1\}$;

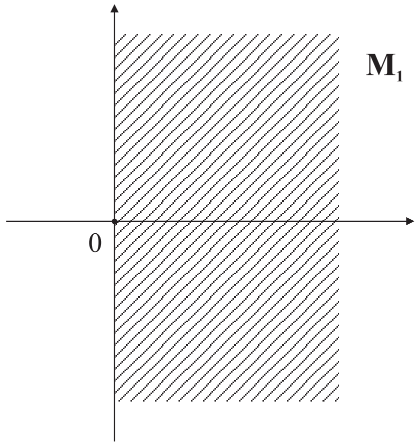
(b) $M_2 = \{z : \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$;

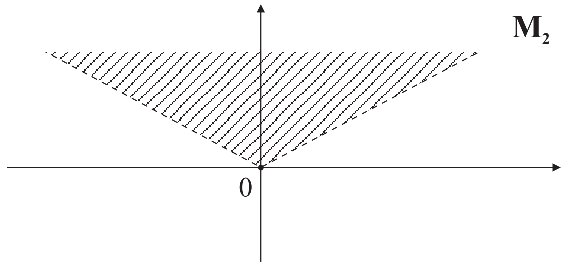
Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} z &= z_1 + i\, z_2 \\ |z-1| &\leq |z+1| \\ (z_1-1)^2 + z_2^2 &\leq (z_1+1)^2 + z_2^2 \\ -2z_1 &\leq 2z_1 \\ -z_1 &\leq z_1 \end{aligned}$$

Das stimmt nur für $z_1 \geq 0$. Diese Menge ist kein Gebiet, weil sie nicht offen ist.





(b) Kein Gebiet, weil $0 \in M_2$.

Aufgabe H3 (Folgen)
(**1+1+1 Punkte**)
Überprüfe die Folgen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(a) $z_n = n^2 e^{-n}(\cos n + i \sin n)$;

(b) $z_n = i^n$;

(c) $z_n = \frac{n+in^2}{n^2-in}$;

Lösung:

(a) Konvergiert gegen 0.

$$|z_n - 0| = n^2 e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(b) Divergiert, denn diese Folge besitzt vier Häufungswerte $1, -1, i$ und $-i$.

(c) Konvergiert.

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{n+in^2}{n^2-in} = \frac{(n+in^2)(n^2+in)}{n^4+n^2} = \frac{n^3+in^2+in^4-n^3}{n^4+n^2} \\ &= \frac{i(n^4+n^2)}{n^4+n^2} = i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} i. \end{aligned}$$

Aufgabe H4 (Reihen)
(**3+2 Punkte**)
Bestimme die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die folgenden Reihen konvergieren. (Vergesse nicht die Randpunkte!)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{4+3i}{5z}\right)^n$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}$;

Hinweis: a) Wurzelkriterium.

Lösung:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|4+3i|^n}{5^n|z|^n\, n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{5|z|(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow$$

Diese Reihe konvergiert für alle $|z| > 1$ und divergiert für alle $|z| < 1$.
Wenn $|z| = 1$, dann konvergiert die gegebene Reihe absolut, weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{|4+3i|^n}{5^n|z|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(-1)^k \frac{z^{2k}}{k!}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{k!} = e^{|z|^2}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.