Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
17. Januar 2011

11. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rücktransformation)

Bestimme jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

(a) $F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$ (Partialbruchzerlegung),

(b) $F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$ (Differentiationssatz),

(c) $F(s) = \frac{1}{(s-2)^4}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Lösung:

(a) Mittels Partialbruchzerlegung berechnen wir:

$$\frac{s+1}{s^2+s-6} = \frac{s+1}{(s+3)(s-2)} = (s+1)\frac{1}{(s+3)(s-2)}$$

$$\overset{\text{PBZ}}{=} \frac{s+1}{5}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{s+1}{s-2} - \frac{s+1}{s+3}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{3}{s-2} - \left(1 - \frac{2}{s+3}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{s-2} + \frac{2}{s+3}\right)$$

Aufgrund des Linearitätssatzes 12.1 reicht es aus, die Originalfunktionen zu $\frac{1}{s-2}$ und $\frac{1}{s+3}$ zu kennen. Laut Beispiel (6) sind das e^{2t} und e^{-3t}. Die gesuchte Originalfunktion ist also

$$f(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}.$$

(b) Es gilt:

$$-F'(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \overset{(5),12.3\,\text{i)}}{=} \mathcal{L}\{e^t\} - \mathcal{L}\{e^{-t}\} \overset{12.1}{=} \mathcal{L}\{e^t - e^{-t}\} \overset{12.2\,\text{(ii)}}{=} \mathcal{L}\{tf(t)\}$$

Also

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t} = \frac{2}{t}\sinh t.$$

(c) Es ist $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4}$. Mit dem Dämpfungs- und Verschiebungssatz folgt somit

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\} = \frac{1}{3!}t^3e^{2t}.$$

Aufgabe G2 (Anfangswertprobleme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)
Löse das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y^{(3)} - 6\ddot{y} + 12\dot{y} - 8y = e^{2t}\ ,\ y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0.$$

Hinweis: $s^3 - 6s^2 + 12s - 8 = (s-2)^3$.

Lösung: Sei $Y := \mathcal{L}\{y\}$. Es gilt:

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2} = \mathcal{L}\{y^{(3)} - 6\ddot{y} + 12\dot{y} - 8y\} = \mathcal{L}\{y^{(3)}\} - 6\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + 12\mathcal{L}\{\dot{y}\} - 8\mathcal{L}\{y\} =$$
$$(s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0)) - 6(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 12(sY(s) - y(0)) - 8Y(s) =$$
$$s^3Y(s) - 6s^2Y(s) + 12sY(s) - 8Y(s) = (s^3 - 6s^2 + 12s - 8)Y(s) = (s-2)^3Y(s).$$

Damit folgt:

$$Y = \frac{1}{(s-2)^4}.$$

Damit ergibt sich aus G1(c)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{6}t^3e^{2t}.$$

Aufgabe G3 (Anfangswertprobleme für lineare Systeme von DGL mit konstanten Koeffizienten)
Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem bestehend aus einem System erster Ordnung und den Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 - 3y_1 - 3y_2 &= t, \\ \dot{y}_2 + y_1 + y_2 &= 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Lösungen des LGS für Y_1, Y_2 enthalten beide den Faktor $\frac{1}{s}$. Eine direkte Konsequenz des Faltungssatzes 12.4 ist (indem man dort $g := 1$ setzt):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du.$$

Lösung: Zunächst wenden wir die Laplace-Transformation an. Für $Y_1 := \mathcal{L}\{y_1\}$ und $Y_2 := \mathcal{L}\{y_2\}$ schreibt sich das System wie folgt:

$$\begin{aligned} (s-3)Y_1 - 3Y_2 &= \frac{1}{s^2} \\ Y_1 + (s+1)Y_2 &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Die Lösung dieses LGS ist:

$$Y_1 = \frac{1}{s}\cdot\frac{4s+1}{s^2(s-2)} \quad , \quad Y_2 = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^2-3s-1}{s^2(s-2)}.$$

Partialbruchzerlegung liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{4s+1}{s^2(s-2)} &= -\frac{9}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{9}{4}\frac{1}{s-2} \\
\frac{s^2-3s-1}{s^2(s-2)} &= \frac{7}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s-2}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4s+1}{s^2(s-2)}\} &= -\frac{9}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{9}{4}e^{2t} \\
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2-3s-1}{s^2(s-2)}\} &= \frac{7}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{2t}
\end{aligned}$$

Es folgt mit dem Hinweis:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y_1(s)\} = \int_0^t \left(-\frac{9}{4} - \frac{1}{2}u + \frac{9}{4}e^{2u}\right) du = \frac{1}{8}(-9 - 18t - 2t^2 + 9e^{2t}), \\
y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y_2(s)\} = \int_0^t \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}u - \frac{3}{4}e^{2u}\right) du = \frac{1}{8}(3 + 14t + 2t^2 - 3e^{2t}).
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Rücksubstitution)
(2+1.5+1.5 Punkte)
Bestimme jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

(a) $F_1(s) = \frac{s+4}{s^2+4s-5}$ (Partialbruchzerlegung),
(b) $F_2(s) = \ln(s+2) + \ln(s+1)$ (Differentiationssatz),
(c) $F_3(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Lösung:

(a) Da $s^2 + 4s - 5 = (s+5)(s-1)$ ist, lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s+4}{s^2+4s-5} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+5}.$$

Es ergibt sich $A = 5/6$ und $B = 1/6$, also

$$\frac{s+4}{s^2+4s-5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+5}.$$

Somit ist

$$f_1(s) = \frac{5}{6}\exp(t) + \frac{1}{6}\exp(-5t).$$

(b) Es ist

$$F_2'(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{\exp(-2t)\} + \mathcal{L}\{\exp(-t)\}.$$

Andererseits gilt nach dem Differentiationssatz $F_2(s)' = -\mathcal{L}\{tf_2(t)\}$, also ergibt sich

$$f_2(t) = -\frac{1}{t}\exp(-2t) - \frac{1}{t}\exp(-t).$$

(c) Es ist $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ und $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$. Mit dem Dämpfungs- und Verschiebungssatz folgt somit

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+2)^3}\right\} = t\exp(-2t) + \frac{t^2}{2}\exp(-2t).$$

Aufgabe H2 (Anfangswertprobleme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)
(4 Punkte)
Löse das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y'' + \omega^2 y = 2\omega\cos\omega t$$

mit $\omega > 0, y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1$.
Hinweis:

$$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} = -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Lösung: Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} + y_0\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{s^2+\omega^2}, \\
y(t) &= t\sin\omega t + y_0\cos\omega t + \frac{y_1}{\omega}\sin\omega t \\
\text{wo} \quad & \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin\omega t)\Big) = t\sin\omega t, \\
& \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{sy_0}{s^2+\omega^2}\Big) = y_0\cos\omega t \text{ und } \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{y_1}{s^2+\omega^2}\Big) = \frac{y_1}{\omega}\sin\omega t.
\end{aligned}$$

Aufgabe H3 (Anfangswertprobleme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten) (**3 Punkte**)
Löse das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{y} + 6y = \sin^2 t + 1\ , \ y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Lösung: Mit Hilfe von (15) erhält man $\mathcal{L}\{\sin^2 t + 1\} = \mathcal{L}\{2 - \cos^2 t\} = \frac{2}{s} - \frac{s^2+2}{s(s^2+4)} = \frac{s^2+6}{s(s^2+4)}$. Nach der Transformation der linken Seite ergibt sich mit $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$$s^2Y(s) + 6Y(s) = \frac{s^2+6}{s(s^2+4)}.$$

Daraus folgt $Y(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$. Bei der Rücktransformation verwenden wir wieder Hinweis aus G3:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du.$$

Das ergibt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = 1/2\int_0^t \sin 2u du = -1/4\cos 2t + 1/4.$$