Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. N. Kraynyukova
Dipl.-Ing. A. Böttcher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2010/11
10. Januar 2011,.

10. Übungsblatt zur „Mathematik III für ETiT, WI(ET), IST, CE, LaB-ET, Sport-Wiss“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Potenzreihen-Ansatz)

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ in der Reihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2 y + 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

und geben Sie eine allgemeine Formel für die Koeffizienten des Potenzreihenansatzes für y an.

Lösung: Aus $y(0) = 0$ folgt $a_0 = 0$. Einsetzen der Potenzreihe $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ in die DGL liefert

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^6 + \ldots = 1 + a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + \ldots .$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $a_0 = 0$, die weiteren Koeffizienten bestimmen sich aus Koeffizientenvergleich

$$a_1 = 1\,; \quad a_2 = 0\,; \quad 3a_3 = a_0 \ \rightarrow\ a_3 = 0\,; \quad 4a_4 = a_1 \ \rightarrow\ a_4 = \frac{1}{4}$$

$$5a_5 = a_2 \ \rightarrow\ a_5 = 0\,; \quad 6a_6 = a_3 \ \rightarrow\ a_3 = 0\,; \quad 7a_7 = a_4 \ \rightarrow\ a_7 = \frac{1}{4 \cdot 7}$$

$$8a_8 = a_5 \ \rightarrow\ a_8 = 0\,; \quad 9a_9 = a_6 \ \rightarrow\ a_9 = 0\,; \quad 10a_{10} = a_7 \ \rightarrow\ a_7 = \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} \ldots .$$

Somit lauten die a_i:

$$a_{3k} = 0 \quad , \quad a_{3k+1} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(3j+1)} \quad , \quad a_{3k+2} = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe G2 (Randwertproblem)

Von folgenden Randwertaufgaben sind die Lösbarkeitseigenschaften festzustellen. Setzen Sie die allgemeine Lösung in die beiden Randbedingungen ein und bestimmen Sie daraus die freien Konstanten in der allgemeinen Lösung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Berechnung von $\Delta := \det R$ mit Hilfe des Alternativsatzes. Überführen Sie dafür das gegebene RWP wenn nötig in ein halbhomogenes RWP mit einer homgogenen DGL. Wo eine eindeutige Lösungen existiert, ist diese zu bestimmen.

(a) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1$

(b) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

(c) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(d) $y'' + y = x - \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom liefert die doppelte Nullstelle $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{1}$. Damit ist $y(x) = a_1 cos(x) + a_2 sin(x)$ allgemeine Lösung der Dgl.

Einsetzen der Randbedingungen liefert

$$a_1 cos(0) + a_2 sin(0) = a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_1 cos(\pi) + a_2 sin(\pi) = -a_1 = 1.$$

Widerspruch! Also ist die RWA unlösbar.

Mit Hilfe des Alternativsatzes berechnen wir

$$\Delta = \det R := det \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \end{pmatrix} := det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus folgt, dass das gegebene RWP entweder unlösbar ist oder unendlich viele Lösungen besitzt. Um dies zu überprüfen berechnen wir $rg(R)$ und $rg(R, \gamma)$. Es ist

$$rg(R) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$rg(R, \gamma) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Da $rg(R) < rg(R, \gamma)$ gilt, bestätigt der Alternativsatz die Unlösbarkeit des Problems.

(b) Mit der partikulären Lösung $y_p(x) = 1$ lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = a_1 cos(x) + a_2 sin(x) + 1\,.$$

Mit den RB'n erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 cos(0) + a_2 sin(0) + 1 &= a_1 + 1 = 0 \\ a_1 cos(\pi) + a_2 sin(\pi) + 1 &= -a_1 + 1 = 0\,. \end{aligned}$$

Widerspruch! Folglich hat das Randwertproblem keine Lösung.

Um den Alternativsatz anwenden zu können müssen wir das RWP zunächst in ein halbhomogenes RWP mit einer homogenen Differentialgleichung überführen.

Mit dem Ansatz

$$y(x) = y_p(x) + z(x) = 1 + z(x) \quad \leftrightarrow \quad z(x) = y(x) - 1$$

eingesetzt in die inhomogene DGL erhalten wir die homogene DGL

$$z''(x) + z(x) = 0$$

mit der homogenen Lösungen

$$z_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\,,$$

sowie die transformierten Randbedingungen

$$z(0) = y(0) - 1 = -1 \quad \text{und} \quad z(\pi) = y(\pi) - 1 = -1\,.$$

Die Determinantenbedingung lautet

$$\Delta := \det R = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Um zu entscheiden ob unendlich viele oder keine Lösung existieren vergleichen wir den Rang

$$rg(R) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

mit dem Rang

$$rg(R, \gamma) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Da $rg(R) < rg(R, \gamma)$ gilt, gibt es keine Lösung, wie schon die vorhergegangene Berechnung ergab.

(c) Die allgemeine Lösung entspricht der von (b) und Einsetzen der Randbedingungen liefert mit

$$a_1 cos(0) + a_2 sin(0) + 1 = a_1 + 1 = 0$$
$$a_1 cos(\pi/2) + a_2 sin(\pi/2) + 1 = a_2 + 1 = 0.$$

die Parameter $a_1 = a_2 = -1$, was auf die eindeutige Lösung

$$y(x) = -cos(x) - sin(x) + 1$$

führt. Die Transformation der DGL entspricht der Rechnung unter (b). Die Überführung der Randbedingungen liefert

$$z(0) = y(0) - 1 = -1 \quad \text{und} \quad z(\pi/2) = y(\pi/2) - 1 = -1\,.$$

Mit den gegebenen Randbedingungen ist

$$\Delta := \det R = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

und das RWP ist eindeutig lösbar.

(d) Die partikuläre Lösung lautet $y_p(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Dadurch ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL gegeben durch

$$y(x) = a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x) + x - \frac{\pi}{2}\,.$$

Einsetzen der Randbedingungen liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 cos(0) + a_2 sin(0) + 0 - \frac{\pi}{2} &= a_1 - \frac{\pi}{2} = 0 \\ a_1 cos(\pi) + a_2 sin(\pi) + \pi - \frac{\pi}{2} &= -a_1 + \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $a_1 = \pi/2$ und $a_2 \in \mathbb{R}$ ist beliebig wählbar. Somit ist jede Funktion

$$y(x) = a_2 \sin x + \frac{\pi}{2} \cos x + x - \frac{\pi}{2}$$

eine Lösung des Randwertproblems.
Um die inhomogene DGL in eine homogene DGL zu transformierten, machen wir den Ansatz

$$y(x) = y_p(x) + z(x) = x - \frac{\pi}{2} + z(x) \quad \leftrightarrow \quad z(x) = y(x) - x + \frac{\pi}{2}\,.$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL erhalten wir die homogene DGL

$$z''(x) + z(x) = 0$$

mit den bekannten homogenen Lösungen

$$z_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\,.$$

Die Überführung der Randbedingungen liefert

$$z(0) = y(0) - 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad z(\pi) = y(\pi) - \pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Mit

$$\Delta := \det R = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

kann es keine oder unendlich viele Lösungen geben.
Es ist

$$rg(R) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad rg(R, \gamma) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi/2 \\ -1 & 0 & -\pi/2 \end{pmatrix} = 1$$

so dass gilt $rg(R) = rg(R, \gamma)$, was bedeutet dass es unendlich viele Lösungen gibt, wie auch obige Rechnung zeigt.

Aufgabe G3 (Eigenwertproblem)

Gegeben sei das vollhomogene Randwertproblem (RWP)

$$y''(x) + 2y'(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0,$$

wobei λ ein Parameter, der sogenannte Eigenwertparameter, ist. Die Lösungseigenschaften des RWP's hängen vom Wert des Eigenwertparameters ab. Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen des RWP zu bestimmen, führen Sie folgende Schritte durch:

(i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ das Fundamentalsystem der homogenen DGL. (*Hinweis:* Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda > -1, \lambda = -1$ und $\lambda < -1$.)

(ii) Stellen Sie die Matrix R und den Vektor γ auf und ermitteln anhand der Bedingung $\det R = 0$ diejenigen λ, für die das Randwertproblem Lösungen hat.

Lösung:

(i) Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha - \lambda.$$

Es besitzt die Nullstellen

$$\alpha_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + \lambda}$$

- Fall 1: $\lambda > -1$
  Das charakteristische Polynom hat zwei einfache, reelle Nullstellen $\alpha_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + \lambda}$. Also ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

  $$y_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}.$$

  Wir benötigen noch ihre Ableitungen:

  $$y_1'(x) = \alpha_1 e^{\alpha_1 x}, \quad y_2'(x) = \alpha_2 e^{\alpha_2 x}.$$

- Fall 2: $\lambda = -1$
  Das charakteristische Polynom hat die doppelte Nullstelle $\alpha = -1$.
  Also ist

  $$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = xe^{-x}$$

  ein Fundamentalsystem mit den Ableitungen

  $$y_1'(x) = -e^{-x}, \quad y_2'(x) = (1 - x)e^{-x}.$$

- Fall 3: $\lambda < -1$
  Das charakteristische Polynom hat zwei einfache, komplex konjugierte Nullstellen $\alpha_{1/2} = -1 \pm i\beta$ mit $\beta = \sqrt{-\lambda - 1}$.
  Also ist

  $$y_1(x) = e^{-x} \sin(\beta x), \quad y_2(x) = e^{-x} \cos(\beta x)$$

  ein Fundamentalsystem mit den Ableitungen

  $$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^{-x} \cdot (\beta \cos(\beta x) - \sin(\beta x)), \\ y_2'(x) &= -e^{-x} \cdot (\beta \sin(\beta x) + \cos(\beta x)) \end{aligned}$$

(ii) Der Vektor γ lautet

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix R unterscheiden wir wieder die drei Fälle:

- Fall 1: $\lambda > -1$
  Die Matrix R lautet
  $$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) + y_1'(\pi) & y_2(\pi) + y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (1+\alpha_1)e^{\alpha_1 \pi} & (1+\alpha_2)e^{\alpha_2 \pi} \end{pmatrix}$$
  Es gilt $\det R \neq 0$. Das Gleichungssystem $Rc = \gamma$ liefert die eindeutige triviale Lösung $c = 0$. Da die triviale Funktion $y \equiv 0$ jedoch keine Eigenfunktion ist, bestitzt das Randwertproblem keine Eigenwerte, die grösser als -1 sind.
- Fall 2: $\lambda = -1$
  Die Matrix R lautet
  $$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) + y_1'(\pi) & y_2(\pi) + y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\pi} \end{pmatrix}$$
  Es gilt $\det R = e^{-\pi} \neq 0$. Das Gleichungssystem $Rc = \gamma$ liefert die eindeutige triviale Lösung $c = 0$. Also ist $\lambda = -1$ kein Eigenwert.
- Fall 3: $\lambda < -1$
  Die Matrix R lautet
  $$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) + y_1'(\pi) & y_2(\pi) + y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta e^{-\pi}\cos(\beta\pi) & -\beta e^{-\pi}\sin(\beta\pi) \end{pmatrix}$$
  Es gilt $\det R = -\beta e^{-\pi}\cos(\beta\pi)$, und
  $$\begin{aligned} \det R = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\beta e^{-\pi}\cos(\beta\pi) = 0 \\ &\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \quad \cos(\beta\pi) = 0 \\ &\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \quad \beta \in \left\{ z + \frac{1}{2} \mid z \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \left\{ -(z + \frac{1}{2})^2 - 1 \mid z \in \mathbb{N}_0 \right\} \end{aligned}$$
  Für diese λ liefert das Gleichungssystem $Rc = \gamma$ die Lösung des RWP
  $$y(x) = c_1 e^{-x}\sin(\beta x) + c_2 e^{-x}\cos(\beta x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$
  Also hat das RWP die unendlich vielen Eigenwerte $\lambda_k = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\,, \quad k \in \mathbb{N}_0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Randwertproblem (3P))

Gegeben sei das Randwertproblem (RWP)

$$y'' = x, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

(a) Geben Sie dann die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL an und lösen Sie das RWP. Setzen Sie dazu die allgemeine Lösung in die beiden Randbedingungen ein und bestimmen Sie daraus die freien Konstanten in der allgemeinen Lösung.

(b) Wenden Sie die Determinantenbedingung auf das Fundamentalsystem der homogenen DGL für die gegebenen Randbedingungen an, um zu zeigen dass eine eindeutige Lösung des RWP existiert.

Lösung: a) Die homogene Lösung bestimmt sich mit Hilfe des charakterischen Polynoms zu

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x.$$

Der Ansatz vom Typ der Störfunktion lautet $y_p(x) = x^2(a_0 + a_1 x)$ und liefert nach Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich die inhomogene Lösung

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3\,,$$

aus der die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3$$

folgt. Aus $y(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$ und aus $y(1) = 0$ folgt $c_2 = -\frac{1}{6}$ so dass die Lösung des Randwertproblems

$$y(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^3$$

lautet.

b) Das Fundamentalsystem der homogenen Lösung lautet

$$y_1(x) = 1\,; \quad y_2(x) = x\,.$$

Mit Hilfe des Alternativsatzes berechnen wir

$$\Delta. = \det R := det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{pmatrix} := det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Daraus folgt, dass das gegebene RWP eindeutig lösbar ist.

Aufgabe H2 (Randwertproblem (4P))

Überprüfen Sie die Lösbarkeit der gegebenen Randwertprobleme mit Hilfe des Alternativsatzes und geben Sie ggf. die Lösungen an.

(a) $y'' - y = 1, \quad y(0) = y(\pi) = 0$

(b) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos(x), \quad y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0.$

Lösung:

(a) Eine partikuläre Lösung lautet $y_p(x) = -1$.
Ein Fundamentalsystem für die Lösung ist gegeben durch

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

Die Determinantenbedingung

$$det \begin{pmatrix} e^0 & e^{-0} \\ e^\pi & e^{-\pi} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^\pi & e^{-\pi} \end{pmatrix} = e^{-\pi} - e^{\pi} \neq 0$$

ist erfüllt $\implies$ Lösung existiert und ist eindeutig. Die Koeffizienten berechnen sich zu

$$c_1 = \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} - e^{\pi}}, \quad c_2 = \frac{1 - e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}.$$

Damit lautet die Lösung des Randwertproblems

$$y(x) = -1 + \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \cdot e^x + \frac{1 - e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \cdot e^{-x}.$$

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2.$$

Es besitzt die Nullstellen

$$\alpha_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

Also ist

$$y_1(x) = e^{-x}\sin(x), \quad y_2(x) = e^{-x}\cos(x)$$

ein reelles Fundamentalsystem. Der Ansatz der Störfunktion (Resonanzfall) liefert

$$\begin{aligned} y_p(x) =& xe^{-x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right) \\ y_p'(x) =& xe^{-x}\left(A\cos(x) - B\sin(x)\right) \\ &+ (1-x)e^{-x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right) \\ y_p''(x) =& -2e^{-x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right) \\ &+ (2-2x)e^{-x}\left(A\cos(x) - B\sin(x)\right). \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich ergeben folgendes LGS:

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B = 0\,.$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{-x}\sin(x) + c_2 e^{-x}\cos(x) + \frac{1}{2}xe^{-x}\sin(x)\,.$$

Die Determinantenbedingung (reelles Fundamentalsystem, RB'n) liefert

$$det\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi)+y_1'(\pi) & y_2(\pi)+y_2'(\pi)\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-\pi}\cos(\pi) & -e^{-\pi}\cos(\pi)\end{pmatrix} = -e^{-\pi} \neq 0.$$

$\Longrightarrow$ Lösung existiert und ist eindeutig. Aus $y(0) = 0$ folgt sofort $c_2 = 0$ und $y(\pi)+y'(\pi) = 0$ impliziert $c_1 = 0$. Also ist die oben gefundene partikuläre Lösung gleich der Lösung des RWP's.

Aufgabe H3 (Eigenwertproblem (3P))
Bestimmen Sie die Eigenwerte des Problemes

$$y'' - 2y' + (1-\lambda)y = 0 \qquad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Lösung: Wir bilden das charakteristische Polynom: $\mu^2 - 2\mu + (1-\lambda)$. Dieses liefert und die Nullstellen $\mu_{1/2} = 1 \pm \sqrt{\lambda}$.

- $\lambda > 0$: Die allgemeine Lösung lautet

  $$y(x) = c_1 e^{(1+\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{\lambda})x}\,.$$

  Aus $y(0) = 0$ folgt $c_2 = -c_1$, und aus $y(\pi) = 0$ folgt $c_1 = 0$. Also existiert nur die triviale Lösung, und $\lambda > 0$ ist kein Eigenwert des Problems.

- $\lambda = 0$: Das Poynom hat eine doppelte Nullstelle in 1, also ist hier die allgemeine Lösung gegeben durch

  $$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x\,.$$

  .

  Die Bedingung $y(0) = 0$ liefert $c_1 = 0$, und die Bedingung $y(\pi) = 0$ ergibt $c_2 = 0$. Auch hier ist $\lambda = 0$ also kein Eigenwert.

- Ist nun $\lambda < 0$, $\lambda = -\rho$, so sind $1 \pm i \cdot \sqrt{\rho}$ die Nullstellen des Polynoms, und die allgemeine Lösung lautet

  $$y(x) = c_1 e^x \sin(\sqrt{\rho}x) + c_2 e^x \cos(\sqrt{\rho}x)\,.$$

  Die Bedingung $y(0) = 0$ erzwingt $c_2 = 0$, und aus der Bedingung $y(\pi) = 0$ erhalten wir $c_2 e^\pi \sin(\sqrt{\rho}\pi) = 0$. Dies hat genau dann eine Lösung mit $c_2 \neq 0$, wenn $\sin(\sqrt{\rho}\pi) = 0$, also $\sqrt{\rho} \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Also sind ($\rho = -\lambda$) die Zahlen $\lambda = -1, -4, -9, -16, \ldots$ Eigenwerte des Problems.